

L. FÖPPL

AUFGABEN
AUS TECHNISCHER
MECHANIK

AUFGABEN AUS TECHNISCHER MECHANIK

STATIK
FESTIGKEITSLEHRE
DYNAMIK

VON

Dr. L. FÖPPL

O. PROFESSOR A. D. TECHN. HOCHSCHULE MÜNCHEN



MÜNCHEN UND BERLIN 1930
VERLAG VON R. OLDENBOURG

DRUCK VON R. OLDENBOURG, MÜNCHEN.

DEM ANDENKEN
AN AUGUST FÖPPL
GEWIDMET

Vorwort.

Indem ich vorliegende Aufgabensammlung der Öffentlichkeit übergebe, komme ich einem öfters geäußerten Wunsche meiner Studenten nach, die von mir in den Übungen und Prüfungen gestellten Aufgaben zur Technischen Mechanik in Buchform erscheinen zu lassen. Nach einer bekannten Lehrerfahrung hat der Studierende das für ihn recht schwierige und fast vollständig neue Gebiet der Technischen Mechanik erst dann richtig verstanden, wenn er die Fähigkeit besitzt, Aufgaben selbständig zu lösen. Solange er nicht diesen Grad des Verständnisses erreicht hat, kann er mit den Lehren der Technischen Mechanik in seinem späteren Berufe nicht viel anfangen. Aus diesem Grunde muß auf die Übungen zur Technischen Mechanik das größte Gewicht gelegt werden. Ein wichtiger Punkt ist dabei die Auswahl der Aufgaben. Abgesehen von gewissen lehrhaften Aufgaben, die ohne Rücksicht auf eine praktische Verwendung nur dazu dienen, geeignete Beispiele zu gewissen Sätzen der Mechanik zu bilden, ist es von Wichtigkeit, auch Aufgaben zu stellen, die unmittelbar der Praxis des Ingenieurberufes entnommen sind; denn erstens können wir durch nichts besser die Notwendigkeit der Ausbildung des Ingenieurs in der Mechanik beweisen und zweitens bleiben gerade solche Aufgaben im Gedächtnis des Studierenden haften, da sie sein Interesse beanspruchen, so daß es mit Hilfe derartiger Aufgaben gelingt, den jungen Studenten verhältnismäßig weitgehend in der Technischen Mechanik zu fördern. Ich bin daher immer bemüht gewesen, praktische Aufgaben, die ich teils Industrieprospekten und Ingenieurzeitschriften entnommen habe, teils Kollegen verdanke, für meine Übungen nutzbar zu machen.

Zugleich verfolge ich mit der Herausgabe meiner Aufgaben noch den Zweck, dem Studierenden eine gedrängte Übersicht des in meinen Vorlesungen über Technische Mechanik behandelten Stoffes zu verschaffen. Entsprechend der Einteilung dieser Vorlesungen in eine Unterstufe, die bis zum Vorexamen reicht und die Statik, Festigkeitslehre und Dynamik mit den Grundlagen der Kinematik umfaßt, und eine Oberstufe, die für gewisse Studienrichtungen in höheren Semestern bis zum Hauptexamen reicht und höhere Festigkeitslehre sowie höhere Dynamik

behandelt, soll auch die Aufgabensammlung in zwei getrennten Teilen, einerseits für die Unterstufe, anderseits für die Oberstufe erscheinen.

Das vorliegende Bändchen bezieht sich nur auf die Unterstufe, enthält also nur den Stoff, wie ich ihn in der Vorprüfung von Maschinen- und Elektroingenieuren, Bauingenieuren und Technischen Physikern verlange. Um den Studierenden einen Überblick über diesen Stoff zu geben, ist die Aufgabensammlung in Abschnitte und Paragraphen unterteilt, wobei dort, wo es mir auf Grund meiner Prüfungserfahrungen notwendig schien, am Kopf der Paragraphen in Kürze die wesentlichen neuen Grundsätze, die zur Lösung der Aufgaben des betreffenden Paragraphen in Betracht kommen, angeführt worden sind, wobei ich aber keineswegs Vollständigkeit angestrebt habe. Ich hoffe, daß sich auf diese Weise die Studierenden die wichtigsten Lehren der Technischen Mechanik in dieser lapidaren Form leichter einprägen, wobei die sich daran anschließenden Aufgaben für das Verständnis der Sätze mindestens ebensoviel beitragen können als ihre systematischen Ableitungen, wie sie in den Vorlesungen gegeben werden.

Da das Büchlein ausschließlich auf das Bedürfnis der Studierenden zugeschnitten worden ist, so habe ich mich bemüht, den Umfang möglichst bescheiden zu halten in der sicheren Erwartung, damit bei den Studierenden volles Verständnis zu finden; denn nichts ist bei dem Studenten beliebter als ein „kleines“ Büchlein, in dem aber viel stehen muß, was er brauchen kann. Ich habe aus diesem Grunde nur eine Auswahl der von mir in den letzten 15 Semestern an der Technischen Hochschule München gestellten Aufgaben wiedergegeben; jedenfalls nicht mehr als mir unbedingt nötig zu sein schien, wobei ich mich durchaus an die Anforderungen unserer Vorprüfung gehalten habe. So kommt es, daß gewisse Paragraphen nur einen geringen Umfang in der vorliegenden Aufgabensammlung für die Unterstufe einnehmen. Sie sollen teilweise in der Aufgabensammlung für die Oberstufe ausführlicher behandelt werden. Die meisten Aufgaben dürften neu, d. h. noch nicht in einer anderen Aufgabensammlung veröffentlicht sein. Für einige Aufgaben ließ sich dies allerdings nicht umgehen, da sie im Interesse des Ganzen nicht gut entbehrt werden konnten. Die Lösungen sind den Aufgabentexten immer gleich angefügt. Es wird auffallen, daß bei manchen Aufgaben nur die Resultate, bei anderen die vollständige Ausarbeitung der Lösungen und bei weiteren nur Andeutungen über den zur Lösung führenden Weg mit Angabe der Resultate gegeben worden sind. Es hat dies seinen Grund teils in pädagogischen Erwägungen, teils in dem Bestreben, die Wiederholung der Lösung einer ähnlichen, schon ausführlicher behandelten Aufgabe zu vermeiden. Was die Vorprüfungsaufgaben anbelangt, soweit sie Aufnahme gefunden haben und die als solche stets gekennzeichnet sind, so sind bei ihnen absichtlich vielfach nur die Resultate angegeben worden, um dem Studierenden die Aufgabe gegenüber der Prüfung nicht zu erleichtern, so daß er in der Lage ist, den jeweiligen Stand seines Wissens und Könnens relativ zu den Anforderungen des Vorexamens selbständig zu überprüfen.

Es ist mir ein Bedürfnis, an dieser Stelle meiner treuen Mitarbeiter in den Übungen zur Technischen Mechanik der letzten Jahre dankbar zu gedenken. Es sind dies die Herren Diplomingenieur Philipp Ebert, Diplomingenieur Sigmund Freiherr von Boutteville und Diplomingenieur August Hennig, denen ich manchen Hinweis auf geeignete Aufgaben verdanke.

Möge das Büchlein mit dazu beitragen, vielen Studierenden den großen Schrecken, den ihnen die Mechanik einflößt, zu mildern oder gar zu nehmen, so daß vielleicht sogar manchem von ihnen die Mechanik eine treue Freundin wird, die ihm sicher im späteren Berufe stets hilfreich zur Seite stehen wird. Mit diesem Wunsche lege ich das Büchlein in die Hände der Studierenden.

München, im November 1929.

L. FÖPPL.

Inhaltsübersicht.

	Seite
I. Die Grundlagen der Statik	1
§ 1. Das Gleichgewicht von Kräften in der Ebene	1
§ 2. Das Seileck und die Momentenfläche beim Balken	8
§ 3. Statisch bestimmte Balken verschiedener Formen	11
§ 4. Statisch bestimmte ebene Fachwerke und Fachwerkträger	21
§ 5. Das Gleichgewicht von Kräften im Raum und das räumliche Fachwerk	27
§ 6. Schwerpunkte und Trägheitsmomente von Flächen	33
§ 7. Das Gleichgewicht von Seilen	37
II. Festigkeitslehre	45
§ 1. Der einachsige (lineare) und zweiachsige (ebene) Spannungszustand und der Mohrsche Spannungskreis	45
§ 2. Spannungen in achsensymmetrischen Kesseln und Schalen	50
§ 3. Biegung des geraden Stabes und Zentralellipse	54
§ 4. Elastische Linie des ursprünglich geraden Stabes bei der Biegung	61
§ 5. Die Formänderungsarbeit, der Satz von Castigliano und statisch unbestimmte Aufgaben	69
§ 6. Statisch unbestimmte ebene und räumliche Fachwerke	91
§ 7. Torsion und Knicken von Stäben	96
§ 8. Stäbe auf nachgiebiger Unterlage; Achsensymmetrischer ebener Spannungszustand; Bachsche Näherungstheorie für Platten	104
III. Dynamik	115
§ 1. Kinematische Grundbegriffe	115
§ 2. Geradlinige Bewegung des materiellen Punktes und Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse	120
§ 3. Krummlinige Bewegung des materiellen Punktes und der Energiesatz	126
§ 4. Die Schwingungen eines materiellen Punktes und Drehschwingungen von starren Körpern	138
§ 5. Dynamik des Punkthaufens; insbesondere das Prinzip von d'Alembert und Festigkeitsberechnungen bewegter Körper sowie Schwerpunkt- und Flächensatz	157
§ 6. Der Kreisel. Elastische Schwingungen von Stäben und Wellen	179

I. Abschnitt.

Die Grundlagen der Statik.

§ 1. Das Gleichgewicht von Kräften in der Ebene.

Werden die Komponenten einer Kraft P_i eines ebenen Kräftesystems in bezug auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem x, y mit X_i und Y_i bezeichnet und das Moment dieser Kraft in bezug auf den Nullpunkt mit $M_i = P_i \cdot a_i$ (s. Abb. 1), so lauten die

Gleichgewichtsbedingungen fürs
ebene Kräftesystem

$$\Sigma X_i = 0; \quad \Sigma Y_i = 0; \quad \Sigma M_i = 0.$$

Daraus folgt:

1. Zwei Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie gleich groß, entgegengesetzt gerichtet sind und auf derselben Wirkungslinie liegen.

2. Drei Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sich ihre Wirkungslinien in einem Punkte schneiden und außerdem ihre geometrische Summe null ist. (S. Aufgaben 10, 11, 13, 16.)

Die Zerlegung einer Kraft nach zwei vorgegebenen Geraden, die in derselben Ebene wie die Kraft gelegen sind und sich mit ihr in einem Punkte schneiden, erfolgt nach dem Parallelogramm der Kräfte. Die Zerlegung einer Kraft nach drei vorgegebenen Geraden, die mit der Kraft in einer Ebene liegen, erfolgt graphisch nach dem Culmannschen Verfahren oder rechnerisch nach der Momentenmethode (s. Aufgabe 16).

Um innere Kräfte eines Systems zu bestimmen, denke man sich das gegebene System durch geeignete Schnitte in zwei

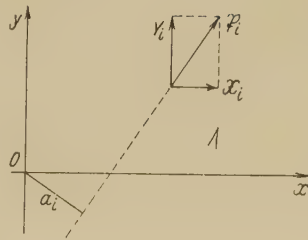


Abb. 1.

oder mehr Teile zerlegt, auf die in den Schnitten die vorher inneren Kräfte als äußere angreifend zu denken sind. Jeder einzelne Teil muß dann für sich den obigen Gleichgewichtsbedingungen genügen. Besonders geeignet für Schnitte sind Gelenke, da in ihnen nur Kräfte und keine Momente übertragen werden können (s. Aufgabe 10).

Statisch unbestimmt heißt eine Aufgabe der ebenen Statik, wenn die obigen drei Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreichen, die Auflagerkräfte eindeutig zu bestimmen; z. B. ist ein gewöhnlicher Balken mit drei Auflagerungen einfach statisch unbestimmt.

1. Aufgabe.

Für ein zum Anhängen der Last an den Kranhaken dienendes Schlingenseil ist eine maximale Zugkraft $S = 1000 \text{ kg}$ zulässig. Wie groß muß für eine rechteckige Last von der Breite $b = 1,2 \text{ m}$ und dem Gewicht $Q = 1,4 \text{ t}$ der Abstand h vom Lasthaken mindestens sein?

Lösung: $h = 0,62 \text{ m}$.

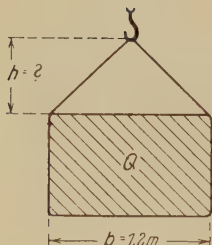


Abb. 2.

2. Aufgabe.

Durch den Kniehebel ABC wird das in C angelenkte Gleitstück, das auf der festen horizontalen Unterlage U gleitet, gegen die vertikale Wand W gepreßt. Welche Kräfte treten in den Gelenken A und C auf, wenn auf B eine vertikale Kraft $P = 30 \text{ kg}$ drückt?

Lösung: Die Horizontalkomponente der Gelenkdrücke in A und C beträgt $112,5 \text{ kg}$, die Vertikalkomponente 15 kg .

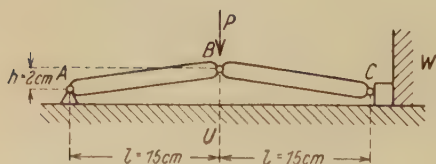


Abb. 3.

3. Aufgabe.

Um am Stempel A einer Presse eine große Kraft zu erhalten, wendet man nebenstehende Anordnung an: Die Stangen BC , CD , EF , FG sind an ihren Enden

gelenkig miteinander und mit dem Stempel bzw. Boden verbunden. Es ist gefragt, wie groß die auf den Stempel ausgeübte Kraft P_2 ist, wenn die in C und F horizontal angreifenden Kräfte $P_1 = 20 \text{ kg}$ betragen.

Lösung: $P_2 = 100 \text{ kg}$.

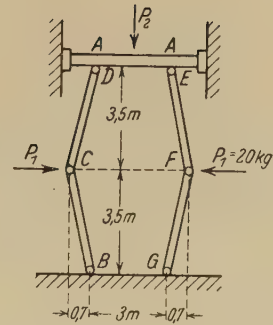


Abb. 4.

4. Aufgabe.

Eine Last $Q = 100 \text{ kg}$ hängt an einem über 2 kleinen Rollen laufenden Seil in der Mitte der Entfernung l beider Rollen. Die freien Enden des Seiles sind mit je $P = 250 \text{ kg}$ belastet. Für welchen Durchhang h der Seilmitte tritt Gleichgewicht zwischen den 3 Kräften ein?

Lösung: $h = 0,6 \text{ m}$.

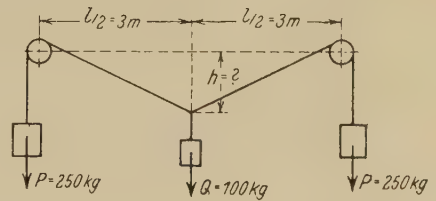


Abb. 5.

5. Aufgabe.

An den Hebelarmen eines Nußknackers greift je eine Kraft von $P = 12 \text{ kg}$ an. Welche Druckkräfte wirken auf die Nuß und wie groß ist die im Gelenk übertragene Kraft A ?

Lösung: Der Druck, mit dem die Nuß zusammengepreßt wird, beträgt 84 kg ; der Gelenkdruck A ist 72 kg .

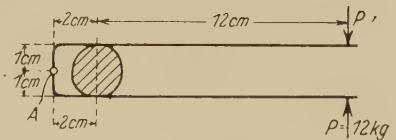


Abb. 6.

6. Aufgabe.

An den Griffen einer Zange greifen die Kräfte $P = 15 \text{ kg}$ an.

- Wie groß sind die an der Schneide auf den dort gefaßten Gegenstand ausgeübten Kräfte?
- Wie groß ist die im Bolzen A zwischen den beiden Zangenteilen übertragene Kraft?

Lösung: a) 100 kg ,
b) 115 kg .

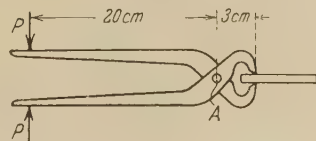


Abb. 7.

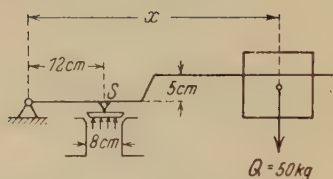


Abb. 8.

7. Aufgabe.

Der Druck, den der Stift S auf den Deckel eines Sicherheitsventils ausübt, wird durch ein verschiebbares Gewicht $Q = 50 \text{ kg}$ geregelt. Der Dampf drückt auf einer Kreisfläche von 8 cm Durchmesser gegen den Deckel. Wie groß muß der Abstand x eingestellt werden, damit sich das Ventil bei Überschreitung des Druckes $p = 10 \text{ at}$ öffnet?

Lösung: $x = 120,7 \text{ cm}$.

8. Aufgabe.

Auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel $\alpha = 30^\circ$ ruht eine Last $P = 100 \text{ kg}$. Durch ein über eine reibungsfreie Rolle laufendes Seil ist sie mit einem Gewicht Q verbunden, das auf einer anderen schiefen Ebene vom Neigungswinkel $\beta = 60^\circ$ aufliegt.

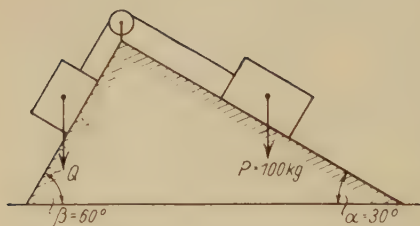


Abb. 9.

1. Fall. Die Reibung der Körper auf den schiefen Ebenen sei vernachlässigt.

Wie groß muß Q sein, um dem Gewicht P Gleichgewicht zu halten?

2. Fall. Der Reibungskoeffizient sei für beide schiefen Ebenen zu $\mu = 0,25$ angenommen.

Zwischen welchen extremen Werten Q_1 und Q_2 darf sich die Größe des Gegengewichts Q bewegen, damit Gleichgewicht gegen ein Gleiten in der einen oder anderen Richtung besteht?

Lösung:

1. Fall: Aus $P \sin \alpha = Q \cdot \sin \beta$ folgt

$$Q = P \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 100 \cdot \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = 57,8 \text{ kg}.$$

2. Fall: Die Bedingung dafür, daß das Gewicht P heruntergleitet, lautet:

$$P \cdot (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \geq Q_1 \cdot (\sin \beta + \mu \cos \beta),$$

woraus

$$Q_1 \leq P \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \beta + \mu \cos \beta} = 28,7 \text{ kg}$$

folgt. Die Bedingung für das Herabgleiten von Q lautet:

$$P (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \leq Q_2 (\sin \beta - \mu \cos \beta),$$

woraus

$$Q_2 \geq P \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sin \beta - \mu \cos \beta} = 96,2 \text{ kg}$$

folgt.

Es herrscht demnach Gleichgewicht, solange Q zwischen den Grenzen 28,7 kg und 96,2 kg bleibt.

9. Aufgabe.

Für einen fahrbaren Drehkran ist das Gegengewicht G_2 so zu berechnen, daß die Kipplast Q_k (bei der der Kran kippen würde) das Doppelte der Tragkraft $Q = 4 \text{ t}$ beträgt. Eigengewicht des Krans $G_1 = 3 \text{ t}$.

Hierauf ist die Standfestigkeit des unbelasteten Kranes ($Q = 0$) zu prüfen.

Lösung: Kippen erfolgt bei einer Last von $Q_k = 8 \text{ t}$ um die äußere Schiene B . Für B als Momentenpunkt mit Auflagerkraft $A = 0$ ergibt sich $G_2 = 7,08 \text{ t}$. Bei fehlender Last Q ist nur Kippen um die innere Schiene A möglich. Dafür als Momentenpunkt mit Auflagerkraft $B = 0$ würde sich ein Gegengewicht $G_2' = 19,8 \text{ t}$ ergeben, so daß mit dem oben gefundenen Gegengewicht $G_2 = 7,08 \text{ t}$ die Standfestigkeit des unbelasteten Kranes gewährleistet ist.

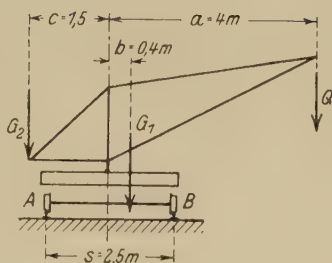


Abb. 10.

10. Aufgabe.

Bei der abgebildeten Steinzange wird der zu hebende Stein durch Druckplatten erfaßt, die sich beim Anheben infolge des Eigengewichts der Last anpressen.

Es ist für die gegebene Anordnung Größe und Richtung der von den Druckplatten ausgeübten Kraft P graphisch zu ermitteln und zu prüfen, ob der Reibungskoeffizient $\mu = 0,45$ von Eisen gegen Stein genügt, um ein Herausgleiten der Last aus der Zange zu verhüten.

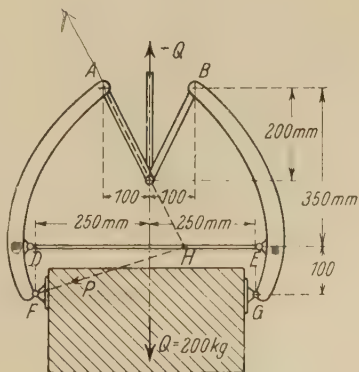


Abb. 11.

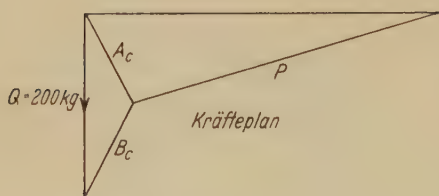


Abb. 12.

Lösung: Da die einzelnen Teile der Steinzange gelenkig miteinander verbunden sind, können nur Kräfte und keine Momente durch die Gelenke übertragen werden. Betrachtet man das Gleichgewicht der am Bügel ADF angreifenden Kräfte für sich, so müssen sich die drei Kräfte längs AC und längs DE und durch Gelenk F in einem Punkt H schneiden. AC folgt aus der Zerlegung von $-Q$ im Gelenk C :

Aus dem Kräfteplan (s. Abb. 12) ergibt sich

$$P = 330 \text{ kg mit } P_x = 315 \text{ kg} \\ P_y = 100 \text{ kg} = \frac{Q}{2}.$$

Erforderlich wäre mindestens eine Normalkraft

$$P_x = \frac{Q/2}{\mu} = \frac{100 \text{ kg}}{0,45} = 222 \text{ kg},$$

so daß mit der tatsächlichen Normalkraft von 315 kg eine Sicherheit gegen Gleiten

$$\text{von } \frac{315 - 222}{222} = 42\% \text{ besteht.}$$

11. Aufgabe.

Eine Türe vom Gewicht $G = 80 \text{ kg}$ ist in den Angeln A und B aufgehängt. Man bestimme die Auflagerkräfte in A und B nach Größe und Richtung.

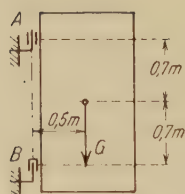


Abb. 13.

Lösung: In der Angel A wird eine horizontal gerichtete Kraft $A = 28,5 \text{ kg}$ übertragen; in der Angel B , die als Gelenk aufzufassen ist, eine Kraft mit den Komponenten $B_x = -A = -28,5 \text{ kg}$ und $B_y = -G = -80 \text{ kg}$.

12. Aufgabe.

Eine Stange AB , deren Gewicht G im Mittelpunkt der Länge $2l$ angreift, stützt sich reibungsfrei an Wand und Boden und bildet mit letzterem den Winkel α . Die Stange wird in C von einem unter dem Winkel β geneigten Seil festgehalten.

Welcher Wert errechnet sich für die Größe der Seilspannung S ?

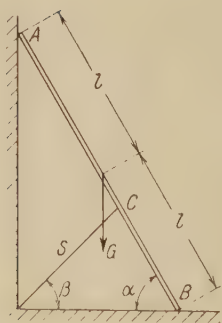


Abb. 14.

Lösung: $S = \frac{G}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}$.

13. Aufgabe.

Eine Welle ist bei A so gelagert, daß sie sich in ihrer Längsachse nicht verschieben kann (was einer gelenkigen Lagerung entspricht); bei B dagegen ist sie verschieblich gelagert (entspricht einem Rollenlager); sie trägt die eingezeichnete Last $P = 4$ t. Wie groß sind die Auflagerdrücke und wie sind sie gerichtet?

Lösung: Die drei Kräfte P , A und B müssen sich in einem Punkt G schneiden; $A = 4,12$ t; $B = 1$ t.

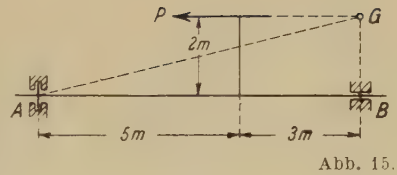


Abb. 15.

14. Aufgabe.

Ein Balken AB ist gegen die Erde durch die Stäbe 1, 2, 3 abgestützt. Wie groß und wie gerichtet sind die durch die angegebene Belastung in A und B hervorgerufenen Auflagerkräfte? Ferner ist zu bestimmen, mit welchen Kräften die Stäbe 1, 2, 3 beansprucht werden.

Lösung zeichnerisch.

Lösung: $A = 8$ t; $B = 3,8$ t; $S_1 = -11,5$ t; $S_2 = 7,3$ t; $S_3 = -3,8$ t.

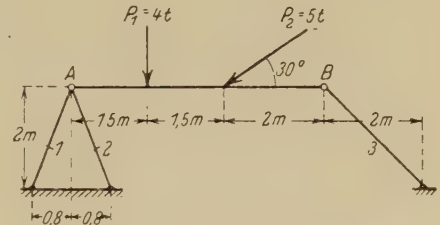


Abb. 16.

15. Aufgabe.

Die beiden Teile einer Stehleiter AG und BG sind durch ein Gelenk G und ein Seil CD verbunden. In A und B ist die Leiter reibungslos gelagert.

Wie groß wird unter der Belastung $Q = 80$ kg die Seilkraft S und der Gelenkdruck G ?

Lösung: Schnitt durch Gelenk G und Seil CD . Zuerst betrachtet man den Teil rechts vom Schnitt mit den drei Kräften: B vertikal, S horizontal und G durch den Gelenkpunkt, die sich alle drei in einem Punkt schneiden müssen. Daraus ergibt sich der Gelenkdruck $G = 31$ kg, auch der Richtung nach. Um das Gleich-

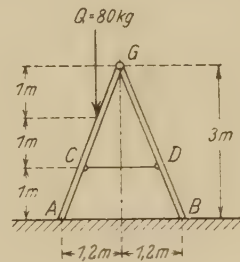


Abb. 17.

gewicht der vier Kräfte links vom Schnitt zum Ausdruck zu bringen, faßt man sie paarweise zusammen und findet auf diesem Wege (zweckmäßig graphisch) $A = 53,5 \text{ kg}$; $B = 26,6 \text{ kg}$; $S = 16,0 \text{ kg}$.

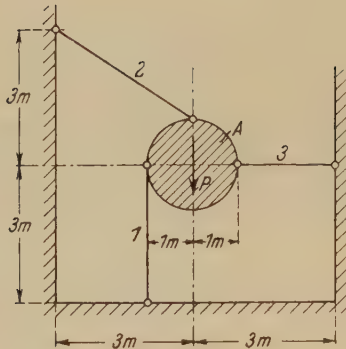


Abb. 18.

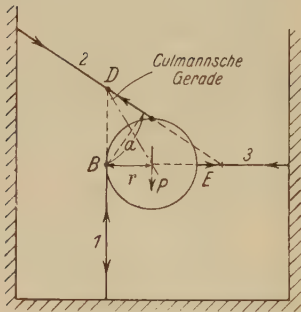


Abb. 19 a.

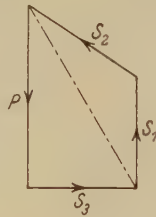


Abb. 19 b.

16. Aufgabe.

Eine Kreisscheibe A ist durch drei Stäbe 1, 2, 3 gegen die Erde abgestützt. Im Mittelpunkt der Scheibe greift eine in ihrer Ebene gelegene Last $P = 2000 \text{ kg}$ an.

Es sind die dadurch in den drei Stäben hervorgerufenen Stabkräfte nach Größe und Vorzeichen zu ermitteln.

Lösung:

1. Graphisch nach dem Culmannschen Verfahren (s. Abb. 19):

2. rechnerisch nach der Momentenmethode (s. Abb. 19a) für B als Momentenpunkt: $S_2 \cdot a = P \cdot r$;

$$S_2 = P \cdot \frac{r}{a} = \frac{1}{1,35} \cdot 2000 \text{ kg} = +1450 \text{ kg},$$

entsprechend findet man für E als Momentenpunkt

$$S_2 = -1200 \text{ kg}$$

und für D als Momentenpunkt

$$S_3 = +1200 \text{ kg}.$$

§ 2. Das Seileck und die Momentenfläche beim Balken.

Zur graphischen Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in der Ebene kann man sich des Seileckes bedienen, das darauf beruht, daß man auf geeigneter Wirkungslinie in der Ebene des Kräftesystems zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte hinzufügt und mit der einen dieser beiden Kräfte beginnend nacheinander die übrigen Kräfte in passender Reihenfolge graphisch addiert.

Das Seileck wird vor allem beim Balken, der durch Kräfte senkrecht zur Achse auf Biegung beansprucht wird, verwendet. Das geschlossene Seileck, dessen Schlußlinie (beim Gerberträger sind es zwei oder mehr Schlußlinien) sich mit den übrigen Seileckseiten, die zwischen den gegebenen Lasten ausgespannt sind, in den Auflagerrichtungen schneiden, wird Momentenfläche des Balkens genannt, weil das Produkt aus der jeweiligen Höhe im geschlossenen Seileck mit dem konstanten Horizontalzug H das Biegemoment im zugehörigen Balkenquerschnitt angibt.

1. Aufgabe.

Man bestimme für den nebenstehend gezeichneten Balkenträger das geschlossene Seileck und aus diesem die Größe der Auflagerkräfte.

Welche Genauigkeit der Konstruktion läßt sich bei der rechnerischen Kontrolle feststellen?

Lösung:

Maßstab des Lageplanes (s. Abb. 21a):

1 m $\sim$ 0,5 cm;

Maßstab des Kräfteplanes (s. Abb. 21b):

1 cm $\sim$ 4 t; $H = 10$ t.

Rechnerisch ergibt sich $A = 8,5$ t; $B = 10,5$ t.

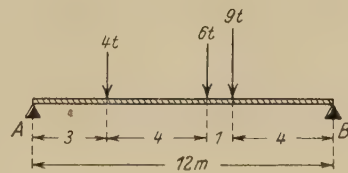


Abb. 20.

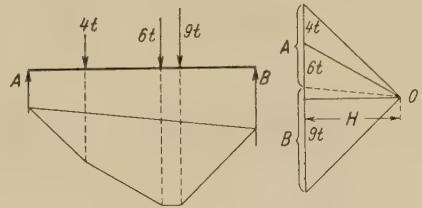


Abb. 21a.

Abb. 21b.

2. Aufgabe.

Für den mit seiner Belastung gegebenen Balken sind mit Hilfe des Seilecks zu bestimmen:

- a) Auflagerkräfte A und B nach Größe und Richtung,
- b) die Momentenlinie und daraus das maximale Biegemoment $M_{\max}$.

Lösung:

- a) $A = 14,5$ t; $B = 17,5$ t.
- b) $M_{\max} = 48$ mt tritt in dem Querschnitt auf, in dem die Last von 9 t angreift.

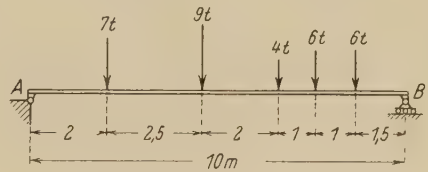


Abb. 22.

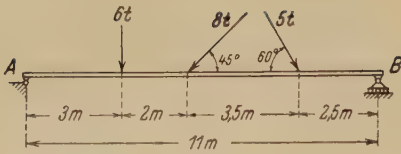


Abb. 23.

3. Aufgabe.

Für den mit seiner schiefen Belastung gegebenen Balken sind mit Hilfe des Seilecks Größe und Richtung der Auflagerkräfte A und B zu ermitteln.

Lösung: Da die Richtung der Auflagerkraft im Gelenk A von vorneherein nicht festliegt, lege man den ersten Seilstrahl durch A ! $A = 9,2 \text{ t}$; $B = 7,5 \text{ t}$.

4. Aufgabe.

Für den mit seiner Belastung gegebenen Balken sind zu bestimmen:

- auflagerkräfte in A und B mittels des Seilecks,
- die Momentenlinie sowie größtes Moment.

Lösung:

- $A = 2,8 \text{ t}$; $B = 11,2 \text{ t}$.
- $M_{\max} = 25,5 \text{ mt}$.

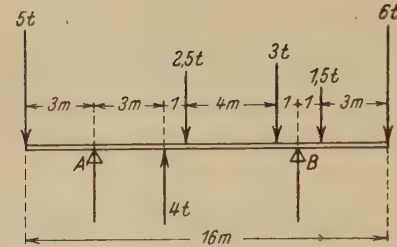


Abb. 24.

5. Aufgabe.

Für den gezeichneten Gerberträger sind mit Hilfe des Seilecks zu bestimmen:

- auflagerkräfte A , B und C sowie der Gelenkdruck G ;
- die Momentenlinie sowie größtes Moment.

Lösung:

- $A = 2,1 \text{ t}$; $C = 1,4 \text{ t}$;
 $B = 11,5 \text{ t}$; $G = 4,2 \text{ t}$.
- $M_{\max} = 12,4 \text{ mt}$.

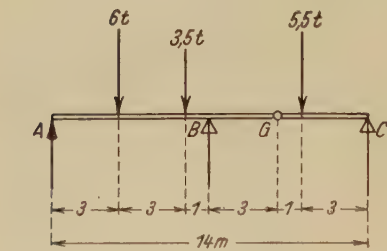


Abb. 25.

6. Aufgabe.

Für den mit seiner Belastung gegebenen Gerberträger sind zu bestimmen:

- Sämtliche Auflagerreaktionen und der Gelenkdruck auf zeichnerischem Wege,
- die Momentenlinie sowie größtes Moment.

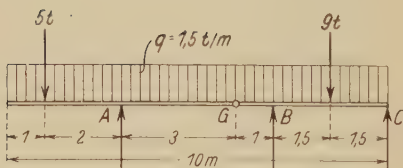


Abb. 26.

Lösung:

- a) $A = 17,33 \text{ t}; B = 4,05 \text{ t};$
 $C = 7,61 \text{ t}; G = 3,3 \text{ t}.$
 b) $M_{\max} = -16,75 \text{ mt (bzw. } +11,42 \text{ mt)}.$

7. Aufgabe.

Für den mit seiner Belastung gegebenen Gerberträger sind mit Seileckkonstruktion zu ermitteln:

- a) Sämtliche Auflagerreaktionen sowie die Gelenkdrücke $G_1, G_2,$
 b) die Momentenlinie sowie die größten Biegemomente.

Es wird empfohlen, den Horizontalzug nicht größer als 8 t zu wählen.

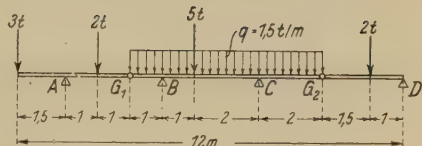


Abb. 27

Lösung:

- a) $A = 6,4 \text{ t}; B = 3,8 \text{ t}; C = 9,6 \text{ t};$
 $D = 1,2 \text{ t}; G_1 = -1,4 \text{ t};$
 $G_2 = 0,8 \text{ t};$
 b) $M_{\max} = M_C = -4,6 \text{ mt bzw.}$
 $M_{x=5,5 \text{ m}} = +3,8 \text{ mt}.$

§ 3. Statisch bestimmte Balken verschiedener Formen.

Grundsatz für die Lösung der Aufgaben dieses Paragraphen ist die Anwendung des Aufschneideverfahrens: Man denke sich den Balken in irgendeinem Querschnitt aufgeschnitten und betrachte das Gleichgewicht des Balkenteiles links oder rechts vom Schnitt für sich, woraus die Größe der im Schnitt übertragenen Kräfte bzw. Momente folgt.

1. Aufgabe.

Ein in A eingespannter Träger besteht aus einem geradlinigen Teil AB von der Länge $h = 90 \text{ cm}$ und einem Halbkreisbogen BC vom Radius $r = 30 \text{ cm}$.

Die Momentenverteilung längs der Trägerachse ist zu berechnen und graphisch anzutragen für folgende drei Fälle:

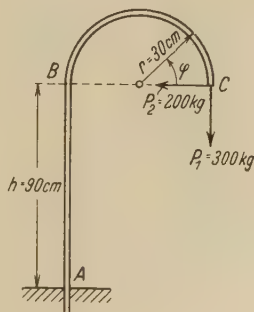


Abb. 28.

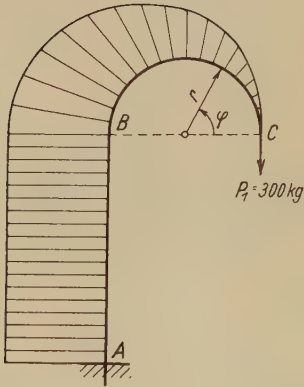


Abb. 29a.

- a) Es greift nur eine vertikale Kraft P_1 am freien Ende C an;
 b) es greift nur eine horizontale Kraft P_2 am freien Ende C an;
 c) es greifen beide Kräfte P_1 und P_2 gleichzeitig in C an!

Lösung (s. Abb. 29 a, b, c):

Fall a)

$$\begin{aligned}
 M_{BC} &= P_1 r (1 - \cos \varphi) \\
 (M_{BC})_{\max} &= M_B = P_1 \cdot 2r = \\
 &= 180 \text{ mkg} \\
 M_{AB} &= \text{const} = 180 \text{ mkg}.
 \end{aligned}$$

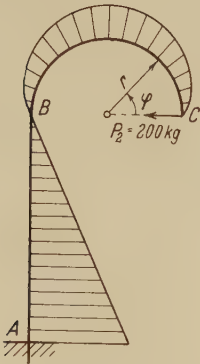


Abb. 29b.

Fall b)

$$\begin{aligned}
 M_{BC} &= P_2 \cdot r \sin \varphi \\
 (M_{BC})_{\max} &= P_2 \cdot r = 60 \text{ mkg}. \\
 M_B &= 0 \\
 M_A &= -P_2 \cdot h = -180 \text{ mkg}.
 \end{aligned}$$

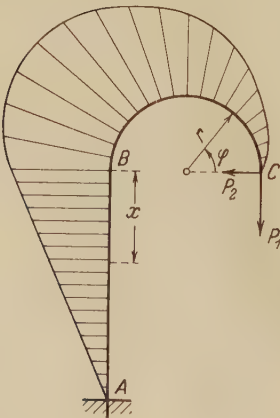


Abb. 29c.

Fall c)

$$\begin{aligned}
 M_{BC} &= r \cdot [P_1 \cdot (1 - \cos \varphi) + \\
 &\quad + P_2 \cdot \sin \varphi] \\
 M_{AB} &= P_1 \cdot 2r - P_2 x \\
 M_A &= 0.
 \end{aligned}$$

2. Aufgabe.

Der Träger ABC ist bei A eingespannt und trägt am Ende C eine Einzellast bzw. ein Moment. Es sind zu bestimmen:

1. Die Auflagerreaktionen in A nach Größe und Richtung,
2. der Momentenverlauf längs der Trägerachse ABC (graphisch senkrecht zur Trägerachse anzutragen!)

für folgende vier Fälle:

- a) P_1 horizontal;
- b) P_2 vertikal;
- c) P_3 senkrecht zur Zeichenebene;
- d) Moment M in C , in der Zeichenebene liegend.

Lösung folgt aus den Abbildungen 31a–e:

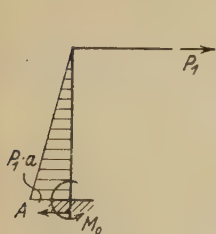


Abb. 31a.

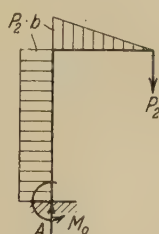


Abb. 31b.

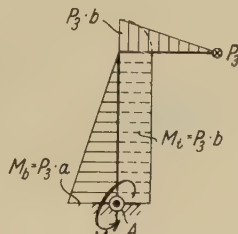


Abb. 31c.

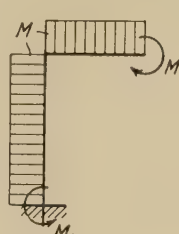


Abb. 31e.

Fall a)

$$A = -P_1$$

$$M_0 = P_1 \cdot a.$$

Fall b)

$$A = -P_2$$

$$M_0 = P_2 \cdot b.$$

Fall c)

$$A = -P_3$$

$$M_0 = P_3 \sqrt{a^2 + b^2}$$

oder

$$M_{01} = P_3 \cdot a$$

$$M_{02} = P_3 \cdot b.$$

Fall e)

$$M_0 = -M.$$

3. Aufgabe.

Ein halbkreisförmiger Träger ist bei A gelenkig, bei B waagrecht verschiebbar gelagert. Im Scheitel C trägt er eine Last P in horizontaler Richtung. Man gebe für einen beliebigen Querschnitt zwischen A und C bzw. zwischen B und C das Biegemoment an!

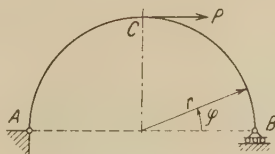


Abb. 32.

Lösung:

$$M_{AC} = \frac{Pr}{2} (1 + \cos \varphi - 2 \sin \varphi)$$

$$M_{BC} = \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi).$$

4. Aufgabe.

Mit einer Säule AD , die durch den Stab GD gestützt ist, ist gelenkig ein Arm CF verbunden, der durch den Stab BE abgestützt ist. Gesucht sind:

- Die Auflagerkräfte in G und A ,
- sämtliche Stabkräfte und
- der Verlauf der Biegemomente längs der auf Biegung beanspruchten Stäbe.

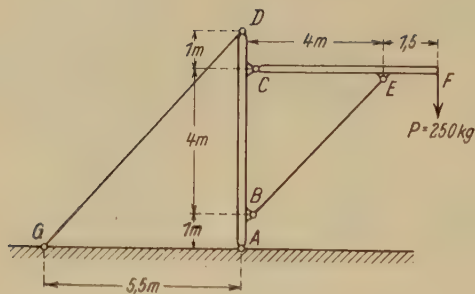


Abb. 33.

Lösung:

Aus dem Kräfteplan (s. Abb. 33b):
1 cm $\sim$ 50 kg.

$$A = 550 \text{ kg} \begin{cases} A_x = 230 \text{ kg} \\ A_y = 500 \text{ kg} \end{cases}$$

$$G = 340 \text{ kg} \begin{cases} G_x = 230 \text{ kg} \\ G_y = 250 \text{ kg} \end{cases}$$

$$C = 360 \text{ kg} \begin{cases} C_x = 344 \text{ kg} \\ C_y = 94 \text{ kg} \end{cases}$$

$$BE = -486 \text{ kg} \begin{cases} BE_x = 344 \text{ kg} \\ BE_y = 344 \text{ kg} \end{cases}$$

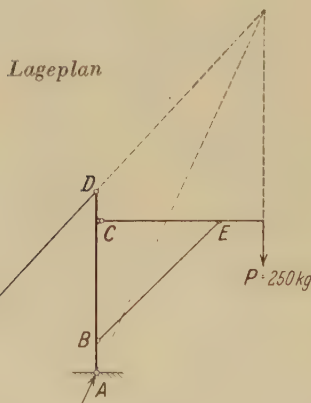


Abb. 33a.

Normalkräfte.

$$GD = +340 \text{ kg} = C$$

$$AB = -500 \text{ kg} = A_y$$

$$BC = -156 \text{ kg} = A_y + BE_y$$

$$CD = -250 \text{ kg} = G_y$$

$$BE = -486 \text{ kg}$$

$$EF = 0$$

$$EC = +344 \text{ kg} = C_x$$

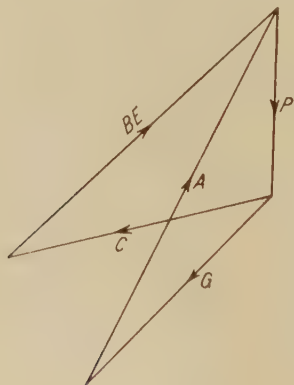


Abb. 33b.

Schubkräfte.

$$BE = 0$$

$$GD = 0$$

$$AB = (+) 230 \text{ kg} = A_x$$

$$BC = (-) 114 \text{ kg} = A_x + BE_x$$

$$CD = (+) 230 \text{ kg} = G_x$$

$$EF = (+) 250 \text{ kg} = P$$

$$CE = (-) 94 \text{ kg} = C_y (= P + BE_y)$$

5. Aufgabe.

Der Träger $ABCD$ wird längs BC durch eine gleichmäßig verteilte vertikale Belastung q beansprucht.

Gesucht sind:

- Die Auflagerkräfte in A und D ,
- der Verlauf des Biegemoments längs der Achse $ABCD$. (Graphisch anzutragen!)

Lösung:

- $A_x = 192 \text{ kg}$; $A_y = 308 \text{ kg}$;
 $D_x = 192 \text{ kg}$; $D_y = 192 \text{ kg}$.
- (s. Abb. 35) $M_B = 57,7 \text{ mkg}$,
 $M_E = -37 \text{ mkg}$.
 E in der Mitte zwischen F und C .

6. Aufgabe.

Ein Träger AB ist in C durch ein Gelenk unterbrochen und als Ausgleich dafür durch die Stäbe 1 bis 5 versteift. Für den Fall, daß eine Einzellast von 8 t angreift, sollen ermittelt werden:

- Die Auflagerkräfte in A und B sowie der Gelenkdruck in G nach Größe und Richtung,
- die Stabkräfte S_1 bis S_5 nach Größe und Vorzeichen,
- der Verlauf von M_b längs der Trägerachse AGB !

Lösung:

- $A = 2,5 \text{ t}$; $B = 5,5 \text{ t}$; $G = 5,6 \text{ t}$ mit $G_x = 5 \text{ t}$ und $G_y = 2,5 \text{ t}$.
- $S_1 = S_5 = -8,33 \text{ t}$; $S_2 = S_4 = +6,67 \text{ t}$; $S_3 = -5 \text{ t}$.
- siehe Abbildung 37.

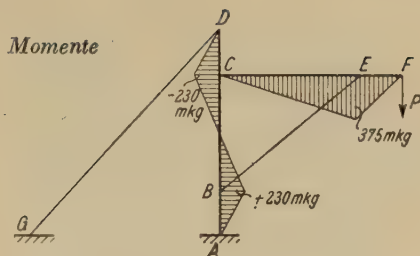


Abb. 33c.

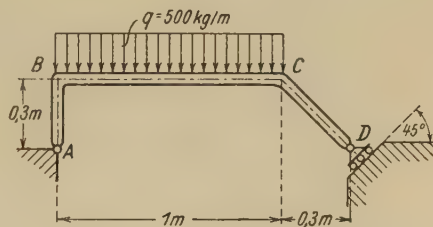


Abb. 34.

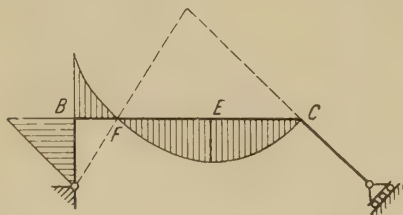


Abb. 35.

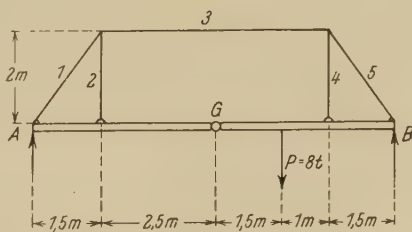


Abb. 36.

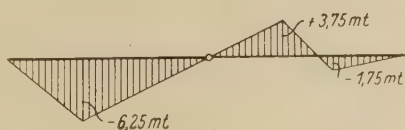


Abb. 37.

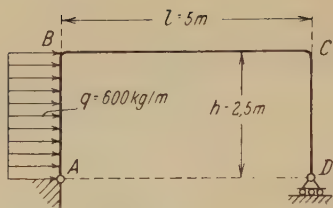


Abb. 38.

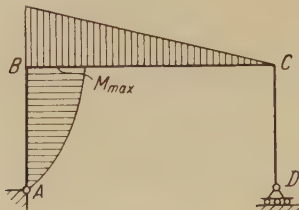


Abb. 39.

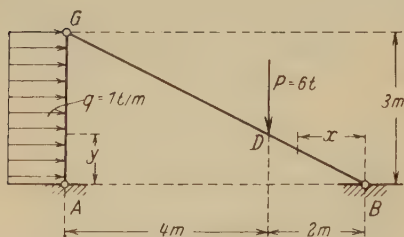


Abb. 40.

7. Aufgabe.

Der Träger $ABCD$ wird längs AB durch eine gleichmäßig verteilte horizontale Belastung q belastet.

Gesucht sind:

- Die Auflagerkräfte in A und B ,
- Verlauf der Biegemomente längs $ABCD$.

Lösung (s. Abb. 39):

- $A_x = 1500 \text{ kg};$
 $D = 375 \text{ kg} = -A_y.$
- $M_{AB} = A_x \cdot x - \frac{q x^2}{2}$
 $M_{\max} = M_B = 1875 \text{ mkg}.$

8. Aufgabe.

Ein Dreigelenkbogen wird, wie gezeichnet, durch eine Einzelkraft $P = 6 \text{ t}$ und eine kontinuierliche Belastung von der Intensität $q = 1 \text{ t/m}$ beansprucht.

Gesucht sind:

- Auflagerkräfte in A und B sowie Gelenkdruck in G nach Größe und Richtung,
 - der Momentenverlauf längs AGB .
- Lösung:
- $A = 1,95 \text{ t}$ mit $A_x = 1,5 \text{ t}$, $A_y = 1,25 \text{ t};$
 $B = 5 \text{ t}$ mit $B_x = 1,5 \text{ t}$, $B_y = 4,75 \text{ t};$
 $G = 1,95 \text{ t}$ mit $G_x = 1,5 \text{ t}$, $G_y = 1,25 \text{ t};$
 - Momentenverlauf längs AG :

$$M_y = A_x \cdot y - \frac{q}{2} y^2$$

$$M_{\max} = M_{y=1,5 \text{ m}} = 1,125 \text{ mt}.$$

Momentenverlauf längs BG :

$$M_x = B_y \cdot x - B_x \cdot y$$

$$M_D = 8 \text{ mt}.$$

9. Aufgabe.

Für den mit seiner Belastung dargestellten Träger sind zu bestimmen und graphisch darzustellen:

- Die Auflagerkräfte A und H ,
- der Verlauf der Spannungsresultierenden (Normalkraft, Schubkraft, Biegemoment) längs des ganzen Trägers.

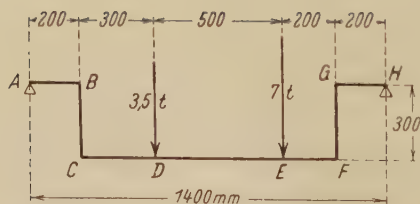


Abb. 41.

Lösung:

a) Momentenpunkt A :

$$H \cdot 1400 = 3,5 \cdot 500 + 7 \cdot 1000$$

$$H = 6,25 \text{ t}$$

und daraus

$$A = 4,25 \text{ t.}$$

b) Momentenverlauf s. Abb. 42.

Verteilung der Normalkraft N
s. Abb. 43.

Verteilung der Schubkraft V
s. Abb. 44.

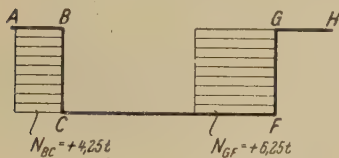


Abb. 43.

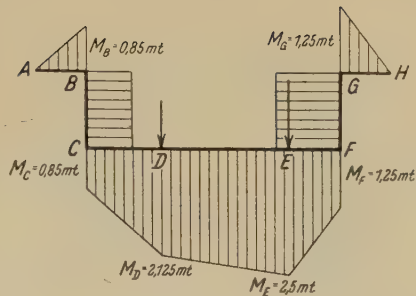


Abb. 42

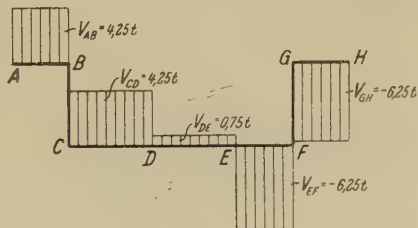


Abb. 44.

10. Aufgabe.

Ein aus biegesteifen Stäben bestehender Rahmen $ABCD$ ist durch den Diagonalstab AC versteift. In den Mitten der Seiten AB und AD greifen zwei gleich große entgegengesetzte gerichtete Kräfte $P = 800 \text{ kg}$ an. Zu bestimmen sind die Gelenkdrücke B und D , außerdem sind die in den Stäben 1 bis 5 auftretenden Kräfte zu ermitteln.

Lösung folgt aus dem Lage- und Kräfteplan (s. Abb. 46).

In A greift am Stab 1 R_1 an, das zerlegt wird in N_{AE} und V_{AE} .

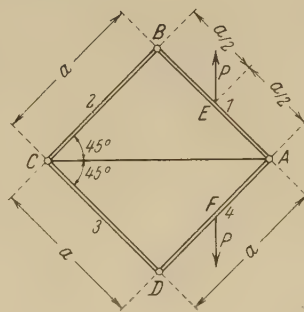


Abb. 45.

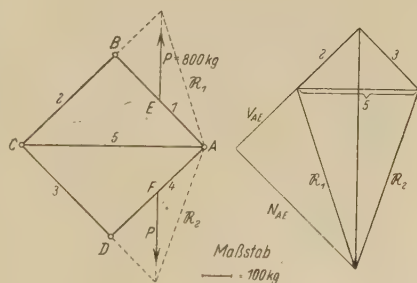


Abb. 46.

Stab	Normalkraft S_{kg}	Schubkraft V_{kg}
1 AE	$+566 = \frac{P}{2} \sqrt{2}$	$283 = \frac{P}{4} \sqrt{2}$
EB	0	$-283 = -\frac{P}{4} \sqrt{2}$
2	$+283 = \frac{P}{4} \sqrt{2}$	0
3	$+283$	0

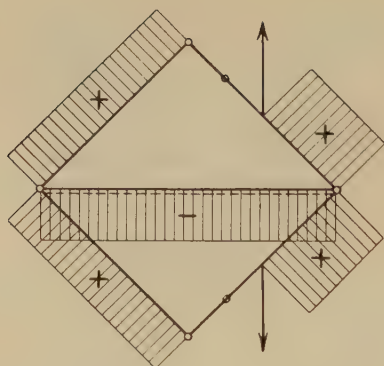


Abb. 47.

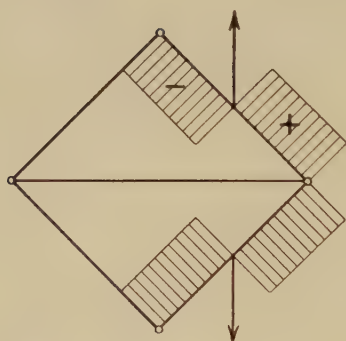


Abb. 48.

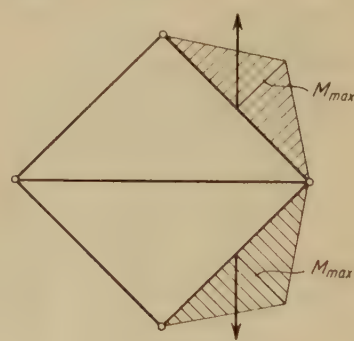


Abb. 49.

Verteilung der Momente s. Abb. 49.

$$\text{Moment in } E: M_{\max} = S_2 \cdot \frac{a}{2} =$$

$$= \frac{P}{4} \sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot P \cdot a.$$

11. Aufgabe.

Der Stabverband $ABCD$ ist in A gelenkig gelagert, in D fest eingespannt. Der Stab AB trägt eine gleichmäßige horizontale Windbelastung von der Intensität $q = 500 \text{ kg/m}$. Zu bestimmen sind:

- Auflagerreaktionen und Gelenkdrücke nach Größe und Richtung,
- Momentenverlauf längs des ganzen Trägers (graphisch darzustellen).

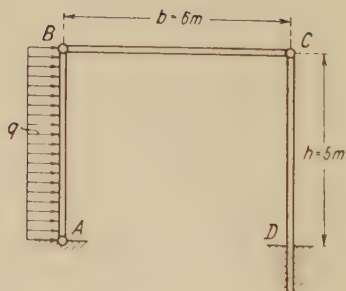


Abb. 50.

Lösung:

a) $Q = qh = 2500 \text{ kg}$

$$A = \frac{Q}{2} = 1250 \text{ kg}$$

$$B = \frac{Q}{2} = 1250 \text{ kg} \left\{ \begin{array}{l} \text{Richtung der} \\ \text{Gelenkdrücke} \\ \text{längs BC} \end{array} \right.$$

$$C = B = 1250 \text{ kg}$$

$$D = C = 1250 \text{ kg}$$

$$M_D = C \cdot h = 6250 \text{ mkg}$$

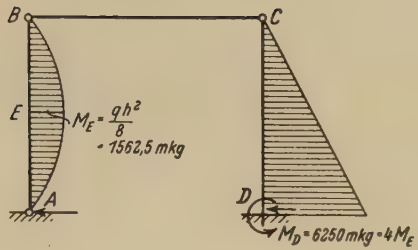


Abb. 51.

b) Siehe Abbildung 51.

12. Aufgabe.

Der in A gelenkig gelagerte Träger AE wird durch die in C und D angelenkten Stäbe 1 und 2 unterstützt. Er hat eine gleichmäßig über die ganze Länge verteilte Last $Q = 1,4 \text{ t}$ aufzunehmen.

Gesucht sind:

1. Die Auflagerkräfte A und B ,
2. die Stabkräfte 1, 2 und 3,
3. der Verlauf des Biegemomentes längs AE , insbesondere das maximale Biegemoment.

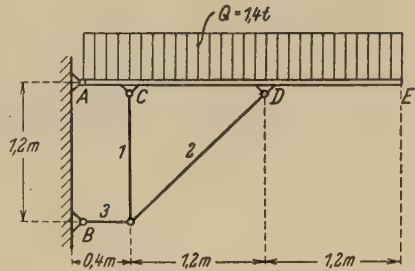


Abb. 52.

Lösung:

1. (S. Abb. 53) $\Sigma M = 0$, für A als Momentenpunkt:

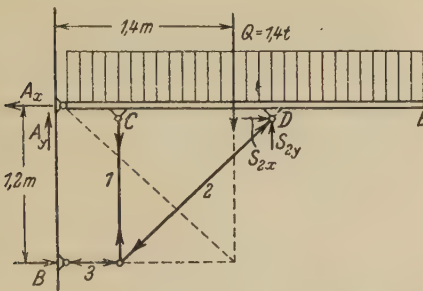
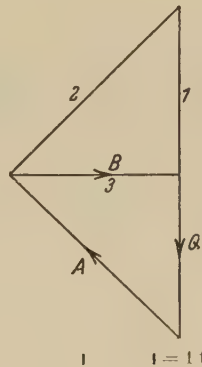


Abb. 53



$$B \cdot 1,2 = Q \cdot 1,4$$

$$B = 1,4 \cdot \frac{1,4}{1,2} = 1,633 \text{ t}$$

$$\Sigma X = 0: A_x = -B = -1,633 \text{ t}$$

$$\Sigma Y = 0: A_y = Q = 1,4 \text{ t.}$$

2. s. Kräfteplan Abb. 53.

$$\left. \begin{aligned} S_{2x} = A_x = -1,633 \text{ t} \\ S_{2y} = S_{2x} = -1,633 \text{ t} \end{aligned} \right\} S_2 = -2,31 \text{ t}$$

$$A_y - S_1 - S_{2y} - Q = 0$$

$$S_1 = A_y - S_{2y} - Q = 1,4 + 1,633 - 1,4 = 1,633 \text{ t}$$

$$S_3 = -B = -1,633 \text{ t}$$

$$S_1 = 1,63 \text{ t}$$

$$S_2 = -2,31 \text{ t}$$

$$S_3 = -1,63 \text{ t.}$$

3. s. Abb. 54; $M_{\max} = H \cdot y_{\max} = 0,52 \text{ mt.}$

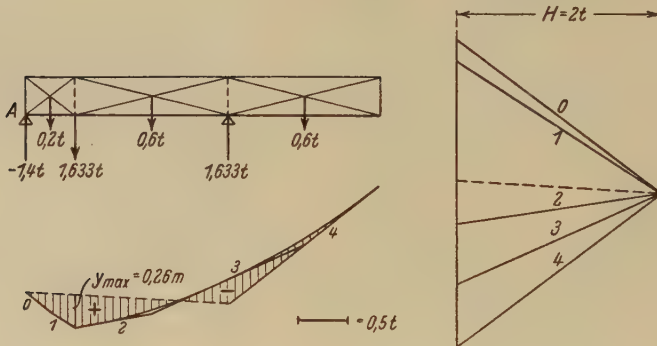


Abb. 54.

13. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung S. S. 1926.)

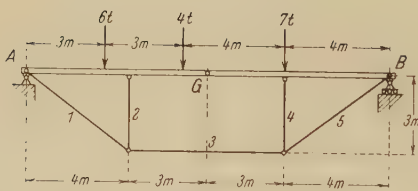


Abb. 55.

Ein biegesteifer Balken AB ist links fest, rechts waagrecht beweglich aufgelagert und trägt drei Einzellasten (s. Abb. 55). In der Mitte, bei G , ist er durch ein Gelenk unterbrochen. Außerdem ist er durch fünf gelenkig angeschlossene Stäbe 1 bis 5 versteift.

1. Man bestimme die Auflagerdrücke bei A und B !
2. Man bestimme die Stabkräfte in den Stäben 1 bis 5 nach Größe und Vorzeichen!
3. Man bestimme den Gelenkdruck in G nach Größe und Richtung!
4. Man gebe die Momentenlinie für den Balken AB an!

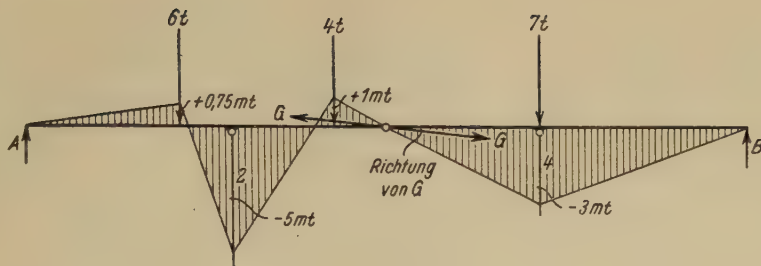


Abb. 56.

Lösung:

1. $A = 9 \text{ t.}$
2. $S_1 = S_5 = 14,58 \text{ t; } S_2 = S_4 = -8,75 \text{ t; } S_3 = 11,67 \text{ t.}$
3. Horizontalkomponente des Gelenkdruckes $G_h = S_3 = 11,67 \text{ t.}$
Vertikalkomponente des Gelenkdruckes $G_v = 1 \text{ t.}$
4. Momentenverlauf und Richtung von G s. Abb. 56.

§ 4. Statisch bestimmte ebene Fachwerke und Fachwerkträger.

Man unterscheidet statisch bestimmte und statisch unbestimmte Fachwerke je nachdem die Anzahl s der Stäbe mit der Anzahl k der Knotenpunkte durch die Beziehung

$s = 2k - 3$ für statisch bestimmte Fachwerke oder

$s > 2k - 3$ für statisch unbestimmte Fachwerke

verknüpft ist. Im letzteren Falle gibt $s - (2k - 3)$ den Grad der statischen Unbestimmtheit an.

Bei Fachwerkträgern, wo die Auflagerbedingungen als Stäbe gezählt werden (Gelenk entspricht 2 Stäben, Rollen- oder Gleitlager entspricht 1 Stab), gilt

$s = 2k$ für statisch bestimmte Fachwerkträger,

$s > 2k$ für statisch unbestimmte Fachwerkträger.

Bei den statisch bestimmten Fachwerken bzw. Fachwerkträgern unterscheidet man einfache bzw. abbrechbare, die mittels des reziproken Kräfteplanes (auch Cremonaplan oder Bowscher Kräfteplan genannt) behandelt werden (s. Aufgaben 1, 2 usw.) und solche mit Grundfigur (s. Aufgaben 6, 7), für die sich je nachdem das Rittersche Schnittverfahren (Aufgabe 6), das Verfahren des unbestimmten Maßstabes (Aufgabe 7) oder das Hennebergsche Stabvertauschungsverfahren (Aufgabe 7) eignet.

Statisch unbestimmte Fachwerke verlangen Eingehen auf die Formänderung, da sie rein statisch keine eindeutige Lösung ergeben. Aufgaben darüber s. II. Abschnitt, § 6.

1. Aufgabe.

Für den neben gezeichneten Fachwerkträger sind die unter der angegebenen Be-

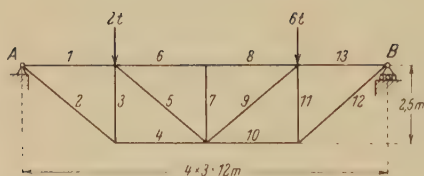


Abb. 57.

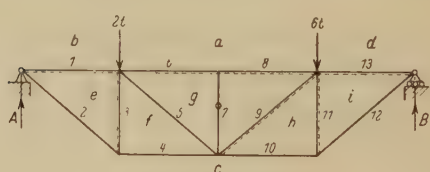


Abb. 58.

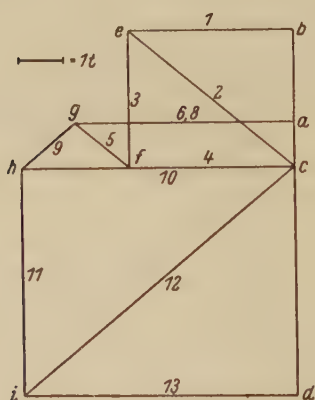


Abb. 59.

lastung auftretenden Stabkräfte nach Größe und Vorzeichen zu bestimmen!

Lösung: $A = 3 \text{ t}$, $B = 5 \text{ t}$.

Lageplan s. Abb. 58.

Reziproker Kräfteplan s. Abb. 59.

2. Aufgabe.

Gegeben ist nebenstehendes Fachwerk. Man bestimme die Auflagerkräfte sowie sämtliche Stabkräfte nach Größe und Vorzeichen:

- wenn nur die Kraft V allein,
- wenn nur die Kräfte W_1, W_2, W_3 an dem Fachwerk angreifen.

Lösung:

Lageplan s. Abb. 61.

- Es greift nur V an. Die Stäbe 2 und 5 werden spannungslos.

Momentenpunkt in B : $A \cdot 12 = V \cdot 3$.

$$A = \frac{V}{4} = 125 \text{ kg}$$

$$\left. \begin{array}{l} B_x = -V \\ B_y = -A \end{array} \right\} B = 520 \text{ kg.}$$

Reziproker Kräfteplan s. Abb. 62

- Es greifen nur W_1, W_2, W_3 an:

Momentenpunkt B : $A \cdot 12 + 300 \cdot 3 - 600 \cdot 6 = 0$.

$$A = \frac{2700}{12} = 225 \text{ kg}$$

$$B_x = -\Sigma W = -1800 \text{ kg}$$

$$B_y = -A = -225 \text{ kg}$$

$$B = 1830 \text{ kg.}$$

Reziproker Kräfteplan s. Abb. 63

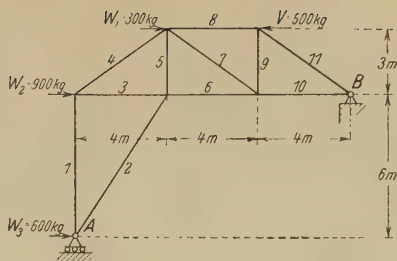


Abb. 60.

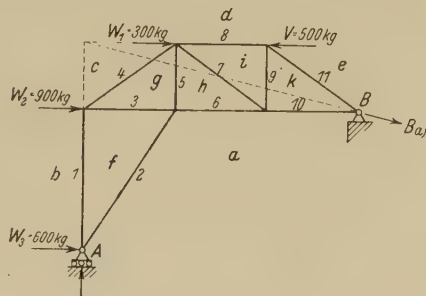


Abb. 61.

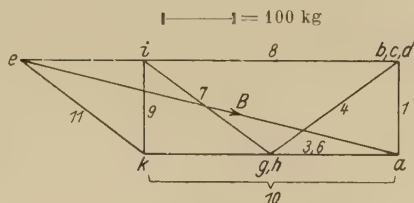


Abb. 62.

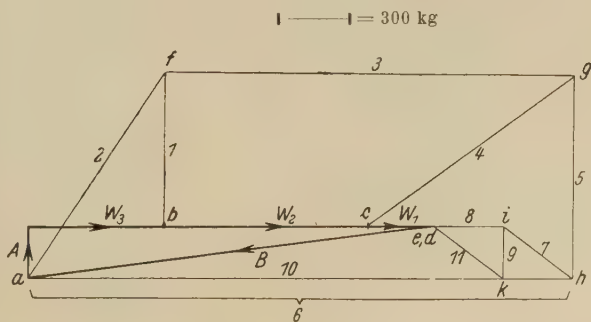


Abb. 63.

Stab	Spannung in kg	
	Fall a)	Fall b)
1	-125	+ 670
2	0	-1070
3	+168	-1800
4	-206	+1120
5	0	-900
6	+168	-2400
7	+206	+380
8	-335	+300
9	-125	-225
10	+335	-2100
11	+206	+380

3. Aufgabe.

Für den neben gezeichneten Fachwerkträger sind die unter der gegebenen Belastung auftretenden Stabkräfte nach Größe und Vorzeichen mit Hilfe eines reziproken Kräfteplanes zu bestimmen!

Lösung: Auflagerkräfte: $A = 6\frac{1}{6} \text{ t}$; $B = 6\frac{5}{6} \text{ t}$.

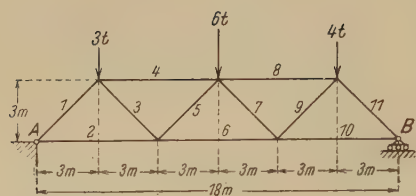


Abb. 64.

Stab:	1	2	3	4	5	6
Stabkraft in t:	— 8,8	5,9	4,4	— 9,3	— 4,4	12,3

Stab:	7	8	9	10	11
Stabkraft in t:	— 3,8	— 9,8	3,8	6,8	— 9,7

4. Aufgabe.

Für den neben gezeichneten Fachwerkträger sind die unter der gegebenen Belastung auftretenden Stabkräfte nach Größe und Vorzeichen zu bestimmen.

Lösung: Auflagerkräfte: $A = 2,75 \text{ t}$; $B = 4,25 \text{ t}$.

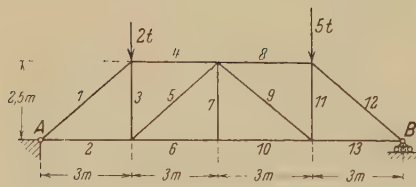


Abb. 65.

Stab:	1	2	3	4	5	6	7
Stabkraft in t:	— 4,3	3,33	0,75	— 3,33	— 1,2	4,25	0

Stab:	8	9	10	11	12	13
Stabkraft in t:	— 5,15	1,2	4,25	— 0,75	— 6,7	5,15

5. Aufgabe.

Für das gezeichnete Krangerüst sind die durch Nutzlast von 6 t und Gegengewicht von 12 t hervorgerufenen Auflagerkräfte sowie die Stabkräfte nach Größe und Vorzeichen zu bestimmen.

Lösung: Auflagerkräfte: $A = 7 \text{ t}$; $B = 11 \text{ t}$.

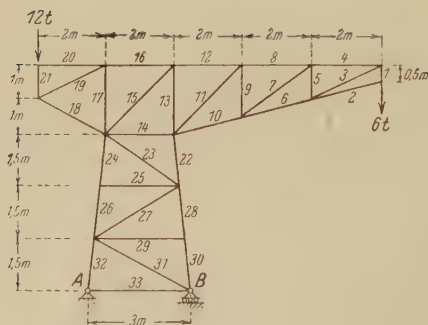


Abb. 66.

Stab:	1	2	3	4	5	6
Stabkraft in t:	6	0	— 13,4	12	3	— 12,4

Stab:	7	8	9	10	11	12
Stabkraft in t:	— 5	16	2	— 16,5	— 2,8	18

Stab:	13	14	15	16	17	18
Stabkraft in t:	— 6	— 19,4	8,5	12	— 6	— 13,4
Stab:	19	20	21	22	23	24
Stabkraft in t:	13,4	0	— 12	— 12	0,8	— 6,4
Stab:	25	26	27	28	29	30
Stabkraft in t:	0	— 6,4	— 0,7	— 11,3	0	— 11,3
Stab:	31	32	33			
Stabkraft in t:	0,6	— 7	0,8			

6. Aufgabe.

Für den gezeichneten Fachwerkträger sind die Auflagerkräfte und die Stabkräfte nach Größe und Vorzeichen zu bestimmen.

Lösung: $A = 1,5 \text{ t}$; $B = 3,5 \text{ t}$.

Stab:	1	2	3	4	5	6
Stabkraft in t:	— 2,12	1,5	0,36	— 2,4	0,35	— 0,38
Stab:	7	8	9	10	11	12
Stabkraft in t:	2	1,25	1,58	— 2,5	— 1,58	1,27
Stab:	13	14	15	16	17	18
Stabkraft in t:	3	3,55	— 3,2	— 2,45	2,9	3,5
Stab:	19	20	21	22	23	24
Stabkraft in t:	— 6	— 19,4	8,5	12	— 6	— 13,4

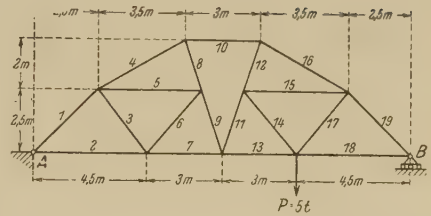


Abb. 67.

7. Aufgabe.

Das nebenan gezeichnete regelmäßige Sechseck von 0,8 m Seitenlänge ist durch die Speichenstäbe 7 bis 12 mit einer starren, unbeweglichen Kreisscheibe A (Durchmesser = 0,4 m) verbunden.

Wie groß sind die unter dem Einfluß der äußeren Kraft $P = 750 \text{ kg}$ auftretenden Stabspannungen S_1 bis S_{12} ?

Lösung mit Hilfe des Hennebergschen Stabvertauschungsverfahrens oder mittels des Verfahrens des unbestimmten Maßstabs.

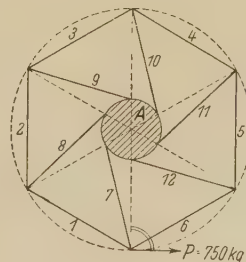


Abb. 68.

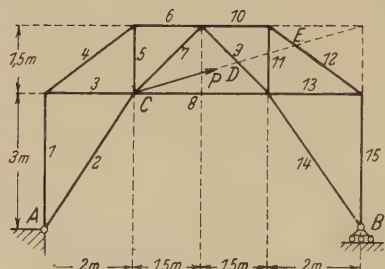


Abb. 69.

Stab:	1	2	3	4	5	6
Stabkraft in kg:	— 220	— 303	— 400	— 520	— 710	— 930
Stab:	7	8	9	10	11	12
Stabkraft in kg:	600	270	360	460	640	830

8. Aufgabe.

An dem gezeichneten Fachwerk greift an einem inneren Knotenpunkt eine Kraft $P = 4 \text{ t}$ an. Man bestimme mit Hilfe des reziproken Kräfteplans sämtliche Stabkräfte nach Größe und Vorzeichen.

Lösung: Auflagerkräfte: $A = 4,6 \text{ t}$; $B = 1,33 \text{ t}$.

Man denke sich die äußere Kraft P längs CDE nach E verschoben und zwei weitere Stäbe CD und DE eingeschaltet, die beide die Stabkraft $+P$ aufnehmen. Auf dieses Fachwerk mit der bei E angreifenden äußeren Last P kann man den reziproken Kräfteplan anwenden.

Stab:	1	2	3	4	5	6
Stabkraft in t:	— 3,3	6,9	4,4	— 5,5	3,3	— 4,4
Stab:	7	8	9	10	11	12
Stabkraft in t:	1,85	3,1	— 1,9	— 1,8	1,33	— 2,2
Stab:	13	14	15			
Stabkraft in t:	1,8	0	— 1,33			

9. Aufgabe.

Ein um eine starre Säule schwenkbarer Kran ist durch die Last P und das Gegengewicht Q beansprucht. Die Stabkräfte sind zeichnerisch zu ermitteln.

Die Auflagerung in A kann als gelenkig, die in B als verschiebbar betrachtet werden. Der Stab 4 ist durch das Lager B nicht unterbrochen.

Lösung: Auflagerkräfte: $A_x = 6 \text{ t}$; $A_y = 10 \text{ t}$; $B = 6 \text{ t}$.

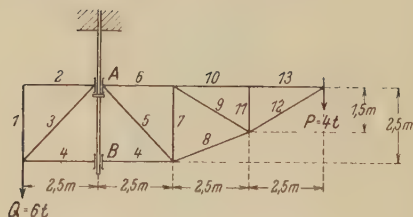


Abb. 70.

Stab:	1	2	3	4 links	4 rechts	5	6
Stabkraft in t:	0	0	8,5	— 6	— 12	5,6	8

Stab:	7	8	9	10	11	12	13
Stabkraft in t:	— 0,8	— 8,6	1,5	7,2	0	— 7,8	7,2

§ 5. Das Gleichgewicht von Kräften im Raum und das räumliche Fachwerk.

Sind mehrere Kräfte, die nicht alle in einer Ebene liegen, an einem Körper im Gleichgewicht, so muß die geometrische Summe der Kräfte sowie die Summe der Momente aller Kräfte für einen beliebigen Punkt als Momentenpunkt verschwinden:

$$\sum \mathfrak{P}_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum \mathfrak{M}_i = 0;$$

oder in Koordinatendarstellung mit Hilfe eines rechtwinkligen Koordinatensystems x, y, z :

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0.$$

$$\sum (M_x)_i = \sum (Z_i y_i - Y_i z_i) = 0;$$

$$\sum (M_y)_i = \sum (X_i z_i - Z_i x_i) = 0;$$

$$\sum (M_z)_i = \sum (Y_i x_i - X_i y_i) = 0.$$

Die Zerlegung einer Kraft im Raume erfolgt nach drei Geraden eindeutig, wenn diese durch einen auf dem Kraftvektor gelegenen Punkt hindurchgehen (Bockgerüst, s. Aufgabe 1 bis 3). Im allgemeinen Fall, wo die Geraden im Raum beliebig windschief gegeben sind, ist die Zerlegung nach 6 Geraden eindeutig. Zur Lösung sucht man Gerade, die möglichst 5 von den 6 Zerlegungsgeraden schneiden. Für sie als Momentenachse ergibt sich die Kraft in der sechsten Geraden (s. Aufgabe 5). Ein Ausnahmefall liegt vor, wenn sich eine Gerade angeben läßt, die die 6 gegebenen Zerlegungsgeraden alle schneidet. Jedes räumliche Kräftesystem kann auf ein Kraftkreuz zurückgeführt werden. Es sind dies zwei windschiefe Kräfte. Von dem Kraftkreuz kann verlangt werden,

daß die eine Kraft des Kraftkreuzes durch einen vorgegebenen Punkt gehen soll, während die andere in einer vorgegebenen Ebene liegen soll, oder es kann als Wirkungslinie für die eine Kraft des Kraftkreuzes eine Gerade vorgeschrieben werden. Ein räumliches Kräftesystem kann auch auf eine resultierende Einzelkraft durch einen vorgegebenen Punkt und ein resultierendes Moment zurückgeführt werden (Aufgabe 9).

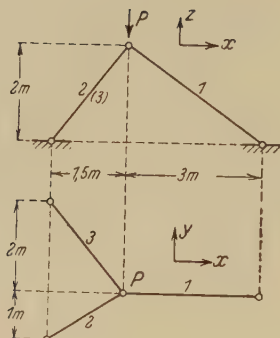


Abb. 71.

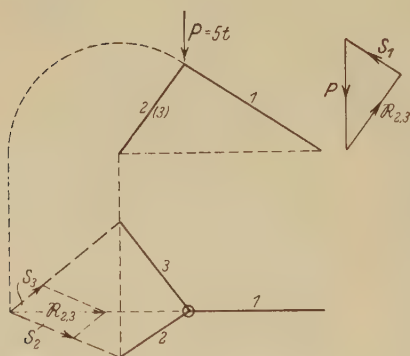


Abb. 72.

1. Aufgabe.

Ein Bockgerüst wird durch eine vertikale Last $P = 5 \text{ t}$ belastet.

Die Stabkräfte S_1 bis S_3 sind nach Größe und Vorzeichen zu ermitteln.

Lösung: s. Kräfteplan Abb. 72.

$$1 \text{ --- } 1 = 3 \text{ t}$$

$$S_1 = -3,0 \text{ t};$$

$$S_2 = -3,0 \text{ t};$$

$$S_3 = -1,9 \text{ t}.$$

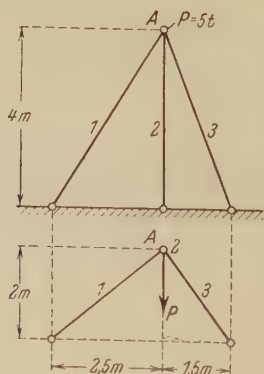


Abb. 73.

2. Aufgabe.

Der Punkt A, an dem eine horizontale Kraft $P = 5 \text{ t}$ angreift, ist durch die Stäbe 1, 2, 3 mit dem Boden verbunden. Man ermittle die durch P in den Stäben 1, 2, 3 hervorgerufenen Stabkräfte nach Größe und Vorzeichen.

$$\text{Lösung: } S_1 = -4,8 \text{ t};$$

$$S_2 = 9,8 \text{ t};$$

$$S_3 = -7,2 \text{ t}.$$

3. Aufgabe.

An dem gezeichneten Bockgerüst greift eine unter dem Winkel von 30° gegen die Horizontale gerichtete Kraft $P = 4 \text{ t}$ an. Man ermittle graphisch die resultierenden Stabspannungen.

Lösung: $S_1 = 4,1 \text{ t};$
 $S_2 = 2,27 \text{ t};$
 $S_3 = -3,2 \text{ t}.$

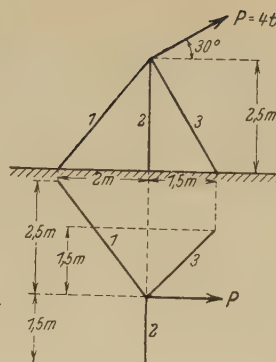


Abb. 74.

4. Aufgabe.

Das in 3 Rissen gezeichnete räumliche Stabsystem wird durch die Kräfte $P_1 = 500 \text{ kg}$ und $P_2 = 200 \text{ kg}$ belastet.

Gesucht sind sämtliche Stabkräfte.

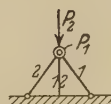
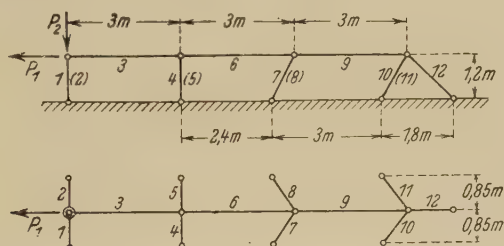


Abb. 75.

Lösung:

Stab:	1	2	3	4	5	6
Stabkraft in kg:	-120	-120	500	0	0	500
Stab:	7	8	9	10	11	12
Stabkraft in kg:	0	0	500	-215	-215	475

5. Aufgabe.

Eine starre Platte ist durch 6 Stäbe gegen den Fußboden und gegen die Wand abgestützt.

Gesucht sind für eine Belastung $P = 200 \text{ kg}$ sämtliche Stabkräfte.

Lösung:

1. Gleichgewicht in der y -Richtung verlangt $S_1 = S_2$.

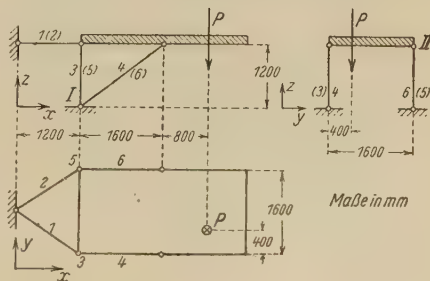


Abb. 76.

2. Für Momentenachse I, senkrecht zur x - z -Ebene (s. Abb.):

$$P \cdot 2,4 \text{ m} = (S_{1x} + S_{2x}) \cdot 1,2 \text{ m}$$

aus 1. und 2. folgt

$$S_{1x} = S_{2x} = P = 200 \text{ kg}$$

$$S_1 = S_2 = 240 \text{ kg.}$$

3. Gleichgewicht in der x -Richtung verlangt wegen 1.:

$$S_{4x} = S_{6x} \text{ oder } S_4 = S_6$$

und

$$S_{4x} = -S_{1x} = -200 \text{ kg,}$$

$$S_{4z} = S_{6z} = -150 \text{ kg,}$$

daraus

$$S_4 = S_6 = -200 \cdot \frac{5}{4} = -250 \text{ kg.}$$

4. Für Momentenachse II senkrecht zur y - z -Achse (s. Abb.):

$$-P \cdot 1,2 + S_3 \cdot 1,6 - S_{4z} \cdot 1,6 = 0,$$

daraus:

$$S_3 = \frac{200 \cdot 1,2 - 150 \cdot 1,6}{1,6} = 0.$$

5. Gleichgewicht in der z -Richtung verlangt:

$$S_3 + S_{4z} + S_5 + S_{6z} + P = 0,$$

woraus $S_5 = 100 \text{ kg}$ folgt.

6. Aufgabe.

Ein starrer Körper A ist durch 6 Stäbe gegen die Erde abgestützt.

Gesucht sind die durch die horizontale Last $P = 100 \text{ kg}$ hervorgebrachten Stabkräfte.

Lösung:

Stab:	1	2	3	4	5	6
Stabkraft in kg:	135	135	-508	388	508	-388

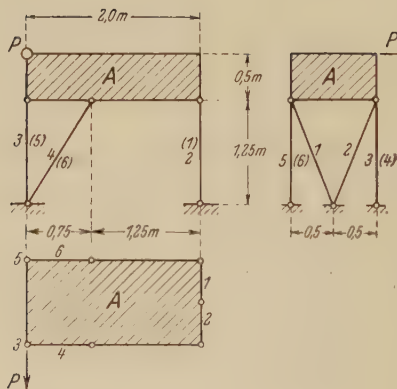


Abb. 77.

7. Aufgabe.

Ein Flugzeugschwimmer ist durch sechs gelenkig angeschlossene Streben gegen das Tragdeck abgestützt. In einem bestimmten Fall habe die Resultierende der Wasserkräfte die in der Zeichnung angegebene Lage und Größe.

Gesucht sind hierfür die Stabkräfte S_1 bis S_6 .

(s. Abb. 79).

Lösung: $S_1 = S_2 = -1,04 \text{ t}$.
 $S_3 = 0$; $S_4 = 1 \text{ t}$.
 $S_5 = S_6 = -0,714 \text{ t}$.

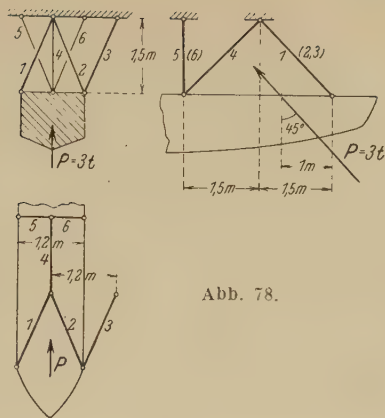


Abb. 78.

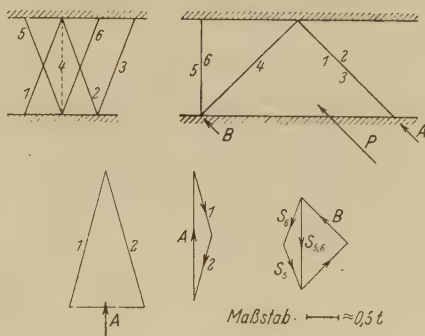


Abb. 79.

8. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung W.-S. 1923/24.)

Die Abbildung zeigt in Aufriß und Grundriß ein Pyramidenfachwerk, das aus 12 Stäben Nr. 1 bis 12 gebildet ist. Die Grundfläche EFG , in der das Fachwerk auf dem Erdboden steht, ist ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge $a = 6 \text{ m}$. Die Pyramidenspitze A liegt senkrecht über dem Schwerpunkt des Dreiecks EFG im Abstand $h = 7 \text{ m}$. Das Stabdreieck BCD ist ebenfalls gleichseitig von der Seitenlänge $b = 3 \text{ m}$.

Es ist festzustellen, ob das Fachwerk statisch bestimmt oder statisch unbestimmt ist.

Ferner sind die Stabkräfte S_1 bis S_{12} jedesmal für die folgenden 3 Belastungsfälle zu bestimmen, wobei zunächst fest-

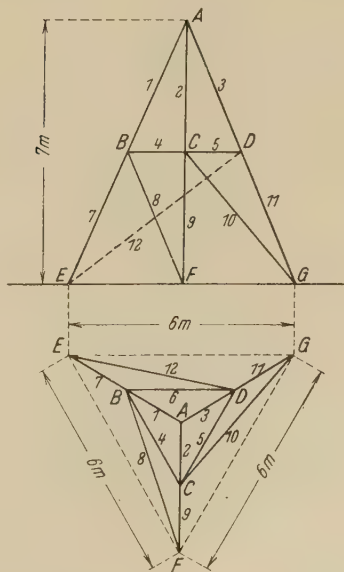


Abb. 80.

zustellen ist, welche Stäbe jeweils spannungslos sind:

1. eine vertikale Last von 3000 kg in der Spitze A ;
2. vertikale Lasten von je 1000 kg in den Knotenpunkten B, C, D ;
3. eine einzige vertikale Last von 1000 kg im Knotenpunkt B .

Lösung:

Stab	Fall 1	Fall 2	Fall 3
1	— 1200	0	0
2	— 1200	0	0
3	— 1200	0	0
4	0	— 315	0
5	0	— 315	0
6	0	— 315	— 250
7	— 1200	— 1150	— 775
8	0	0	— 325
9	— 1200	— 1150	0
10	0	0	0
11	— 1200	— 1150	— 190
12	0	0	+ 252

9. Aufgabe.

In den Ecken eines Quaders wirken die Kräfte $P_1 = 800$ kg, $P_2 = 1000$ kg und $P_3 = 400$ kg.

Man ersetze diese Kräfte durch eine Einzelkraft und ein Moment im Schwerpunkt. Gesucht sind:

1. die Komponenten des Kraft- und des Momentenvektors;
2. die Lage des Kraft- und Momentenvektors im Grund- und Aufriß;
3. die Größe der resultierenden Kraft und des resultierenden Moments.

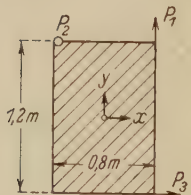
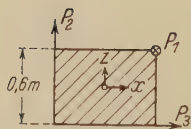


Abb. 81.

Lösung:

1. $M_{1x} = -0,3 P_1 = -240$ mkg
 $M_{1y} = 0$
 $M_{1z} = +0,4 P_1 = +320$ mkg
 $M_{2x} = +0,6 P_2 = +600$ mkg
 $M_{2y} = +0,4 P_2 = +400$ mkg
 $M_{2z} = 0$
 $M_{3x} = 0$
 $M_{3y} = -0,3 P_3 = -120$ mkg
 $M_{3z} = +0,6 P_3 = +240$ mkg

$$\begin{aligned}
 R_x &= + P_3 = 400 \text{ kg} \\
 R_y &= + P_1 = 800 \text{ kg} \\
 R_z &= + P_2 = 1000 \text{ kg} \\
 M_x &= + 360 \text{ mkg} \\
 M_y &= + 280 \text{ mkg} \\
 M_z &= + 560 \text{ mkg}.
 \end{aligned}$$

2. S. Abb. 82.

$$\begin{aligned}
 3. R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 1340 \text{ kg} \\
 M &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 722 \text{ mkg}.
 \end{aligned}$$

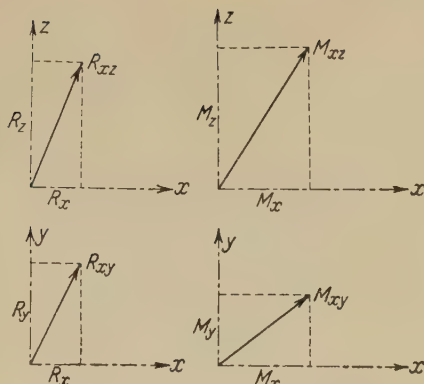


Abb. 82.

§ 6. Schwerpunkte und Trägheitsmomente von Flächen.

1. Aufgabe.

Der Schwerpunkt der gezeichneten Halbkreisringfläche ist mit der Guldin'schen Regel zu bestimmen.

(Lösung s. Abb. 84):

$$a_1 = \frac{4}{3} \frac{r_1}{\pi} = \frac{4 \cdot 35}{3 \pi} = \frac{140}{3 \pi} \text{ mm}$$

$$a_2 = \frac{4}{3} \frac{r_2}{\pi} = \frac{4 \cdot 20}{3 \pi} = \frac{80}{3 \pi} \text{ mm}$$

$$F_1 = \frac{r_1^2 \pi}{2} = \frac{1225}{2} \pi \text{ mm}^2$$

$$F_2 = \frac{r_2^2 \pi}{2} = 200 \pi \text{ mm}^2$$

$$F = F_1 - F_2 = \frac{825 \pi}{2} \text{ mm}^2.$$

$$2 \pi x \cdot F = \frac{4}{3} \pi (a^3 - b^3).$$

$$x = 17,95 \text{ mm}.$$

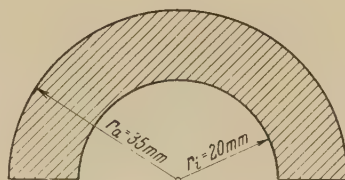


Abb. 83.

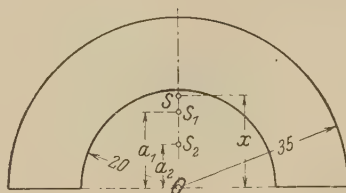


Abb. 84.

2. Aufgabe.

Man bestimme den Schwerpunkt nebenstehender Fläche rechnerisch.

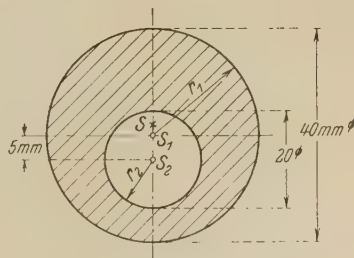


Abb. 85.

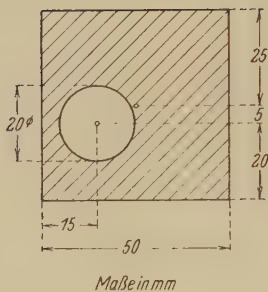


Abb. 86.

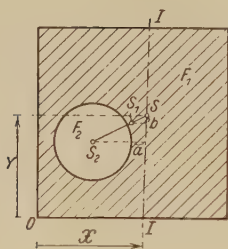


Abb. 87.

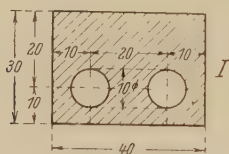


Abb. 88.

Lösung:

$$\frac{SS_1}{SS_2} = \frac{r_2^2 \pi}{r_1^2 \pi} = \frac{1}{4};$$

$$SS_1 = \frac{1}{4} \cdot SS_2 = \frac{1}{4} (SS_1 + 5).$$

$$SS_1 = \frac{5}{3} = 1,67 \text{ mm.}$$

3. Aufgabe.

Der Schwerpunkt nebenstehender Fläche ist rechnerisch zu bestimmen.

Lösung: Momentenachse I—I (s. Abb. 87).

$$a \cdot F_1 = (a + 10) \cdot F_2;$$

$$F_1 = 2500, \quad F_2 = 100 \pi$$

$$a (2500 - 100 \pi) = \pi \cdot 1000$$

$$a = \frac{3140}{2186} = 1,445 \text{ mm}$$

$$b = \frac{a}{2} = 0,72 \text{ mm.}$$

S muß auf der Verlängerung von $S_1 S_2$ liegen (s. Abb. 87).

$$X = 2,5 + a = 2,644 \text{ cm}$$

$$Y = 2,5 + \frac{a}{2} = 2,572 \text{ cm.}$$

4. Aufgabe.

Man bestimme den Schwerpunkt

- der Fläche I rechnerisch,
- der Fläche II zeichnerisch mittels des Seilecks.

Lösung:

a) s. Abb. 89.

$$G \cdot x = 2 G' \cdot r;$$

$$x = \frac{2 G'}{G} \cdot r = 0,752 \text{ mm.}$$

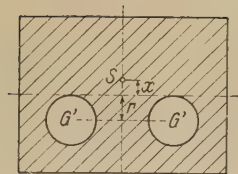


Abb. 89.

b) s. Abb. 90 u. 91.

$$x = 2,6 \text{ cm.}$$

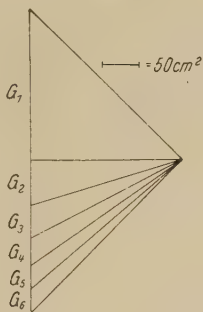


Abb. 91.

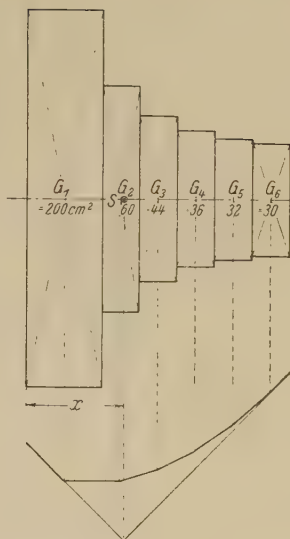


Abb. 90.

5. Aufgabe.

Man bestimme den Schwerpunkt der gezeichneten halben Ellipse zeichnerisch!

Lösung (s. Abb. 93):

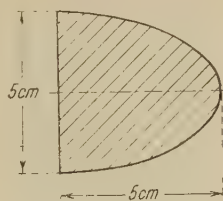


Abb. 92.

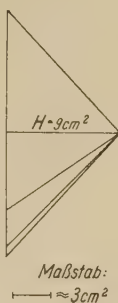
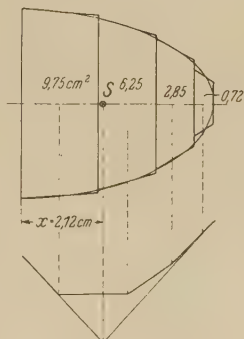


Abb. 93.

6. Aufgabe.

Für nebenstehenden Schnitt durch eine feste Nietverbindung ermittle man graphisch das Trägheitsmoment J in bezug auf die zur Z -Achse parallele Schwerlinie.

Lösung (s. Abb. 95):

Fläche des Querschnittes $F = 226,6 \text{ cm}^2$.

$$J = F \cdot F' = 226,6 \cdot 55,2 = 12500 \text{ cm}^4.$$

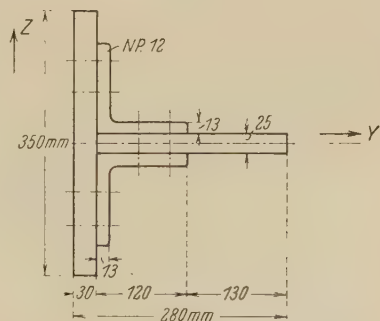


Abb. 94.

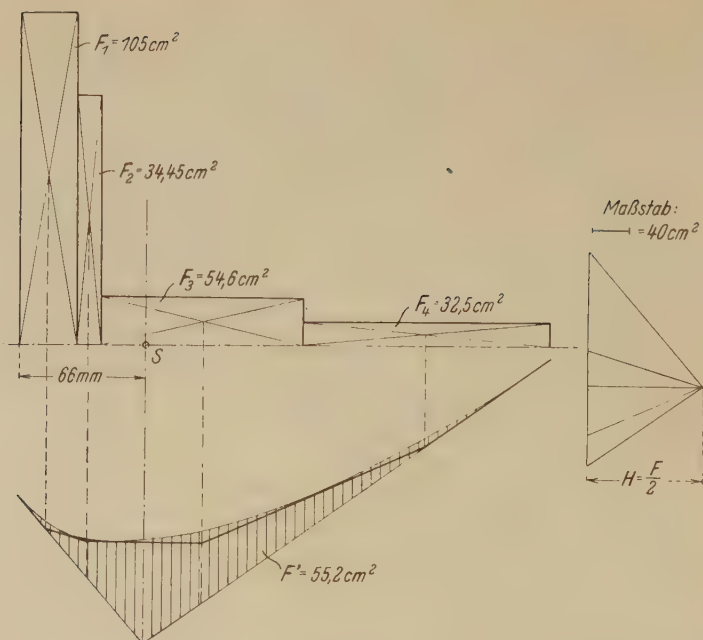


Abb. 95.

7. Aufgabe.

Für nebenstehendes Schienenprofil ermittele man graphisch das Trägheitsmoment J in bezug auf die zur X -Achse parallele Schwerlinie.

Zur Ausführung der Konstruktion ist der unregelmäßige Querschnitt näherungsweise durch Rechtecks- und Trapezflächen zu ersetzen.

Lösung (s. Abb. 97 u. 98):

$$F = 54 \text{ cm}^2$$

$$J = 2 H \cdot F' = F \cdot F'$$

$$= 54 \cdot 27,2 = 1470 \text{ cm}^4.$$

$$W = \frac{1470}{7,1} = 207 \text{ cm}^3.$$

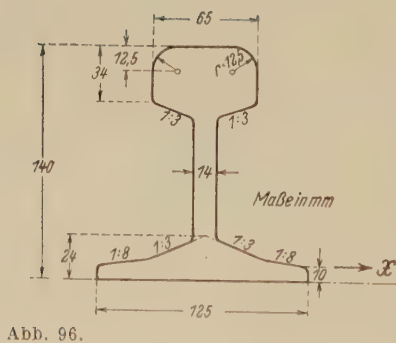


Abb. 96.

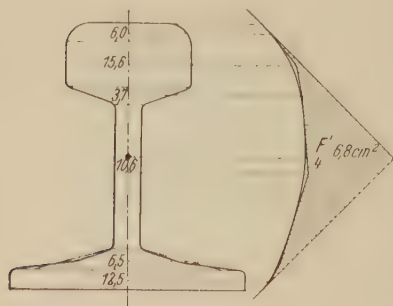


Abb. 97.

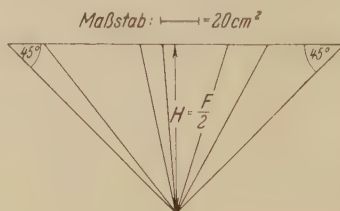


Abb. 98.

8. Aufgabe.

Man berechne das Widerstandsmoment des gezeichneten genieteten Kastenträgers in bezug auf die X -Achse unter der Voraussetzung, daß der Nietpreßdruck ein Verschieben der vernieteten Teile gegeneinander unmöglich macht.

Trägheitsmoment eines Winkeleisens $NP\ 6$ in bezug auf die Kante 0—0:

$$I_0 = 72,7 \text{ cm}^4$$

Schwerpunktsabstand $\xi = 1,85 \text{ cm}$

Querschnitt $F = 11,07 \text{ cm}^2$.

Lösung: $W_x = 1750 \text{ cm}^3$.

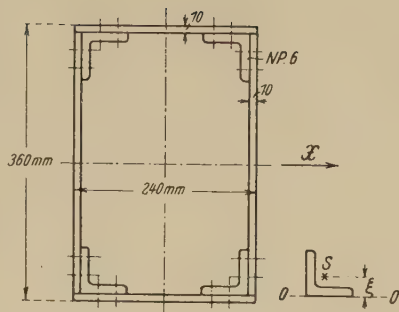


Abb. 99.

§ 7. Das Gleichgewicht von Seilen.

Die Differentialgleichung der Seilkurven lautet:

$$H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -q,$$

worin $q(x)$ in kg/cm die Belastungsdichte des Seiles angibt und H den konstanten Horizontalzug des Seiles bedeutet.

Für schwach durchhängende Seile bei Belastung durch Eigengewicht, das, auf die Längeneinheit des Seiles bezogen, konstant ist, kann man $q = \text{konst}$ setzen (s. Aufgaben 1, 2, 3), d. h. die Kettenlinie durch eine Parabel annähern.

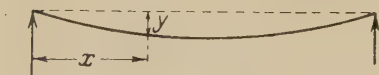


Abb. 100.

1. Aufgabe.

Das Seil einer Seilschwebbahn ist so zu berechnen, daß unter dem Eigengewicht ein maximaler Seilzug $S_m = 12 \text{ t}$ auftritt.

Gegeben: $l = 800 \text{ m}$

$h = 400 \text{ m}$

Seilgewicht $\gamma = 8,95 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$.

Zu ermitteln ist:

1. Das konstant anzunehmende Seilgewicht pro 1 m horizontal gemessen q .

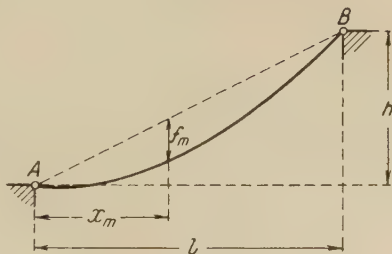


Abb. 101.

2. Seilzug S_m als Funktion von H .
3. Horizontalzug H als Funktion von S_m .
4. Horizontal- und Vertikalkomponenten des Seilzuges in A und B .
5. Stelle x_m des maximalen Durchhanges.
6. Maximaler Durchhang f_m (vertikal gemessen).

Lösung:

$$1. q = \gamma \cdot \sqrt{\frac{h^2 + l^2}{l}} = 8,95 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = 10 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

2. Aus

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -q$$

folgt hier wegen $q = \text{konst} = 10 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$:

$$H \cdot y = -\frac{q}{2} x^2 + C_1 x + C_2.$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 berechnen sich aus den Bedingungen an den beiden Enden.

Für $x = 0$ ist $y = 0$; daraus $C_2 = 0$;
für $x = l$ ist $y = -h$; daraus

$$C_1 = -H \cdot \frac{h}{l} + \frac{q}{2} l,$$

also:

$$H \cdot y = -\frac{q}{2} x^2 + \left(\frac{ql}{2} - H \cdot \frac{h}{l} \right) x$$

und:

$$H \cdot \frac{dy}{dx} = -qx + \frac{ql}{2} - H \cdot \frac{h}{l}.$$

Der maximale Seilzug S_m tritt am Ende B auf, da dort V ein Maximum V_m besitzt. Wegen

$$V = H \cdot \frac{dy}{dx}$$

ist

$$V_m = V_{x=l} = H \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = -\frac{ql}{2} - H \frac{h}{l}$$

und damit

$$S_m = \sqrt{H^2 + V_m^2} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{ql}{2} + H \frac{h}{l} \right)^2},$$

womit der Zusammenhang zwischen dem maximalen Seilzug S_m und dem Horizontalzug H hergestellt ist.

3. Die letzte Gleichung nach H aufgelöst:

$$H = \frac{l^2}{l^2 + h^2}.$$

$$\left[-\frac{qh}{2} + \sqrt{\left(\frac{qh}{2}\right)^2 + \left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right] \left[S_m^2 - \left(\frac{ql^2}{2}\right)^2}\right] \right].$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte ergibt sich $H = 8,64 \text{ t}$.

$$4. A_x = B_x = H = 8,64 \text{ t};$$

$$A_y = -0,32 \text{ t}; B_y = -8,32 \text{ t}.$$

5. Für x_m ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{h}{l}$; daraus berechnet man $x_m = \frac{l}{2} = 400 \text{ m}$.

6. f_m ergibt sich für $x = 400 \text{ m}$ aus der obigen Gleichung für y zu $f_m = 92,5 \text{ m}$.

2. Aufgabe.

Das Seil einer Seilschwebebahn ist so zu berechnen, daß unter dem Eigengewicht ein maximaler Seilzug $S_m = 10 \text{ t}$ auftritt.

Gegeben: $l = 780 \text{ m}$,

$h = 380 \text{ m}$,

Seilgewicht: $\gamma = 11,4 \text{ kg/m}$.

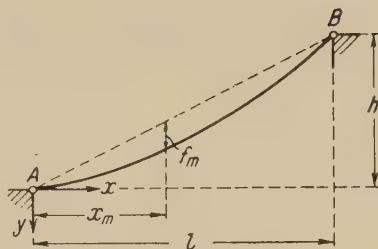


Abb. 102.

Zu ermitteln ist:

1. Das näherungsweise als konstant anzunehmende Seilgewicht pro 1 m horizontal gemessen q .
2. Seilzug S_m als Funktion von H .
3. Horizontalzug H als Funktion von S_m .
4. Horizontal- und Vertikalkomponenten des Seilzuges in A und B.
5. Stelle x_m des maximalen Durchhanges.
6. Maximaler Durchhang f_m (vertikal gemessen).

Lösung (entsprechend der vorangehenden Aufgabe):

$$1. \quad q = 12,7 \frac{\text{kg}}{\text{m}};$$

$$2. \quad S_m^2 = H^2 + \left(\frac{ql}{2} + H \frac{h}{l} \right)^2;$$

$$3. \quad H = 6,06 \text{ t};$$

$$4. \quad A_x = B_x = H = 6,06 \text{ t};$$

$$A_y = + 2,05 \text{ t};$$

$$B_y = - 7,95 \text{ t};$$

$$5. \quad x_m = \frac{l}{2} = 390 \text{ m};$$

$$6. \quad f_m = 159 \text{ m}.$$

3. Aufgabe.

Das Seil einer Seilschwebbahn ist für die angegebene Stellung des Wagens zu untersuchen.

$$\text{Gegeben: } l_1 = l_2 = l = 390 \text{ m},$$

$$h = 380 \text{ m},$$

$$\text{Durchhang } f = 50 \text{ m},$$

$$\text{Seilgewicht } q = 11,4 \text{ kg/m},$$

$$\text{Wangengewicht } P = 5000 \text{ kg}.$$

Gesucht: Größte Seilspannung $S_{\max}$.

Gang der Lösung:

1. Berechnung des Seilgewichtes pro 1 m, horizontalgemessen (q_1 u. q_2).
2. Berechnung der Komponenten des Seilzuges in A und C für Seilabschnitt 1 als Funktion von H_1 .
3. Berechnung der Komponenten des Seilzuges in C und B für Seilabschnitt 2 als Funktion von H_2 .
4. Berechnung der Horizontalzüge H_1 und H_2 .
5. Berechnung von $S_{\max}$.

Lösung:

$$1. \quad q_1 = q \cdot \frac{\sqrt{l_1^2 + h_1^2}}{l_1}$$

$$\text{mit } h_1 = \frac{h}{2} - f = 190 - 50 = 140 \text{ m}.$$

$$q_1 = 11,4 \cdot \frac{\sqrt{390^2 + 140^2}}{390} = 12,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}};$$

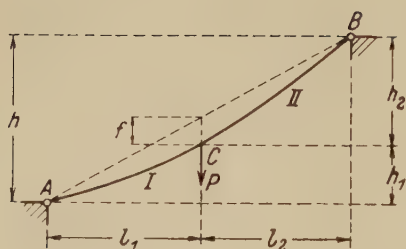


Abb. 103.

entsprechend:

$$q_2 = q \frac{\sqrt{l_2^2 + h_2^2}}{l_2} = 13,39 \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

2. Aus

$$H \cdot y = -\frac{q_1 x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

folgt für Abschnitt I $C_2 = 0$ und

$$C_1 = \frac{q_1 l_1}{2} - H \frac{h_1}{l_1}.$$

daraus:

$$\begin{aligned} H \cdot \frac{dy}{dx} &= V = -q_1 \cdot x + C_1 = \\ &= -q_1 x + \frac{q_1 l_1}{2} - H \cdot \frac{h_1}{l_1} \end{aligned}$$

$$A_y = V_{x=0} = \frac{q_1 l_1}{2} - H \cdot \frac{h_1}{l_1}$$

$$C_{1y} = V_{x=l_1} = -\frac{q_1 l_1}{2} - H \cdot \frac{h_1}{l_1}.$$

3. Entsprechendes gilt für den Abschnitt II:

$$\begin{aligned} C_{2y} &= \frac{q_2 l_2}{2} - H \cdot \frac{h_2}{l_2}, \\ B_y &= -\frac{q_2 l_2}{2} - H \cdot \frac{h_2}{l_2}. \end{aligned}$$

4. Für den Angriffspunkt der Last P gilt:

$C_{1y} - C_{2y} - P = 0$, woraus nach Einsetzen obiger Werte für C_{1y} und C_{2y} eine Gleichung für den Horizontalzug H folgt:

$$H = \frac{l}{2f} \left(P + \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot l \right) = 39 \text{ t.}$$

$$5. \quad S_{\max} = \sqrt{H^2 + B_y^2} = 48 \text{ t.}$$

4. Aufgabe.

Ein Telegraphendraht, von dem ein Meter 120 g wiegt, ist zwischen zwei gleich hoch liegenden Stützen ausgespannt, die um 60 m voneinander entfernt sind und hängt in der Mitte um 50 cm durch.

1. Wie groß ist die durch das Eigengewicht hervorgebrachte Spannung?

2. Um wieviel wachsen die Durchhängung und die Spannung, wenn der Draht außerdem noch eine gleichförmig über die ganze Spannweite verteilte Schneebelastung von 15 kg aufzunehmen hat?

Bei der Beantwortung der zweiten Frage ist anzunehmen, daß die ganze Drahtlänge durch eine Spannung von 1 kg eine Dehnung um 0,2 mm erfährt. Die dabei auftretende Gleichung ist durch Probieren aufzulösen, wobei eine grobe Annäherung genügt.

Lösung:

1. Aus $H \cdot y = -q \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ folgt wegen $y = 0$ für $x = 0$ und $x = l$:

$$C_2 = 0 \text{ und } C_1 = \frac{q l}{2},$$

so daß die Gleichung lautet

$$H \cdot y = \frac{q \cdot x}{2} (l - x).$$

Wird der Durchhang für $x = \frac{l}{2}$ mit f bezeichnet, so gilt:

$$H \cdot f = \frac{q l^2}{8},$$

so daß sich hier

$$H = \frac{q l^2}{8 f} = \frac{0,12 \cdot 60^2}{8 \cdot 0,5} = 108 \text{ kg}$$

ergibt. Die maximale Seilkraft ist

$$\begin{aligned} S_{\max} &= H \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\max}^2} \\ &= H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{q l}{2 H} \right)^2} = 108,05 \text{ kg.} \end{aligned}$$

2. Würde man annehmen, daß sich beim Aufbringen der Schneelast

$$q_1 = \frac{15}{60} = 0,25 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

die Durchhängung f nicht ändert, so würde sich

$$H_1 = \frac{(q + q_1) l^2}{8 f} = \frac{0,37 \cdot 60^2}{8 \cdot 0,5} = 326 \text{ kg}$$

ergeben. Dieses Resultat ist aber unrichtig, da die Berücksichtigung der Längenänderung des Drahtes und damit auch seiner Durchhängung infolge der neu hinzukommenden Schneelast q_1 für die Berechnung des Horizontalzuges H unbedingt erforderlich ist.

Der Zusammenhang zwischen der Länge L , der Entfernung l beider Stützen und der Durchhängung f läßt sich folgendermaßen angenähert berechnen:

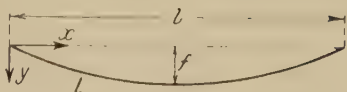


Abb. 104.

Gleichung der Parabel:

$$y = 4 \frac{f}{l^2} x (l - x);$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \frac{f}{l^2} (l - 2x).$$

$$\begin{aligned} L &= \int_{x=0}^{x=l} ds = \int_{x=0}^{x=l} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \\ &= \int_{x=0}^{x=l} \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^4} (l - 2x)^2} \cdot dx \\ &\approx l + \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l} 16 \frac{f^2}{l^4} (l - 2x)^2 \cdot dx = l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l}. \end{aligned}$$

Wird die neue Länge des Drahtes nach Aufbringen der Schneelast q_1 mit L_1 und die zugehörige Durchhängung mit f_1 sowie der Horizontalzug mit H_1 bezeichnet, so gilt einerseits

$$1. \quad L_1 = l + \frac{8}{3} \frac{f_1^2}{l},$$

andererseits wegen des Hookeschen Gesetzes:

$$\begin{aligned} 2. \quad L_1 &= L + \Delta L = L + L \cdot \frac{H_1 - H}{EF} = \\ &= l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l} + \frac{L}{EF} \left(\frac{q_1 l^2}{8 f_1} - \frac{q l^2}{8 f} \right). \end{aligned}$$

Da man mit genügender Annäherung im letzten Ausdruck l statt L als Faktor

setzen kann, ergibt sich aus 1. und 2.

$$\frac{8}{3l} (f_1^2 - f^2) = \frac{l}{8EF} \left(q_1 \frac{l^2}{f_1} - q \cdot \frac{l^2}{f} \right).$$

In dieser Gleichung sind bekannt:

$$f = 0,5 \text{ m}, \quad l = 60 \text{ m},$$

$$\frac{l}{EF} = \frac{\Delta l}{S} = \frac{0,02 \text{ cm}}{1 \text{ kg}} = 0,02 \frac{\text{cm}}{\text{kg}};$$

unbekannt ist die neue Durchhängung f_1 , die sich aus der Gleichung 3. Grades in f_1 angenähert durch Probieren berechnen läßt zu:

$$f_1 = 0,82 \text{ m},$$

woraus

$$H_1 = \frac{(q + q_1) l^2}{8 f_1} = \frac{0,37 \cdot 3600}{8 \cdot 0,82} = 203 \text{ kg}$$

folgt.

II. Abschnitt.

Festigkeitslehre.

§ 1. Der einachsige (lineare) und zweiachsige (ebene) Spannungszustand und der Mohrsche Spannungskreis.

Beim einachsigen Spannungszustand, wie er im Zugstab auftritt, herrscht im Querschnitt

$$\text{die Normalspannung } \sigma_0 = \frac{P}{F}$$

und im Schnitt unter dem Winkel φ gegen den Querschnitt

$$\text{die Normalspannung } \sigma_\varphi = \sigma_0 \cdot \cos^2 \varphi$$

und die Schubspannung

$$\tau_\varphi = \sigma_0 \cdot \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sigma_0 \cdot \sin 2 \varphi.$$

Die Längenänderung des Stabes beträgt nach dem Hookeschen Gesetz:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{P}{EF};$$

E = Elastizitätsmodul (bei Eisen

$$E \approx 2,2 \cdot 10^6 \text{ at}).$$

Die Wärmeausdehnung eines Stabes bei einem Temperatursprung $t - t_0$ ist:

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot (t - t_0);$$

α = thermische Ausdehnungszahl (bei Eisen $\alpha \approx \frac{1}{80000}$).

Beim ebenen Spannungszustand (s. Abb. 106) gilt:

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2 \varphi.$$

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2 \varphi.$$

Diese Formeln können auch mittels des Mohrschen Spannungskreises dargestellt werden (Aufgabe 4 und 5).

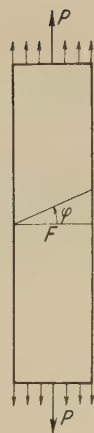


Abb. 105.

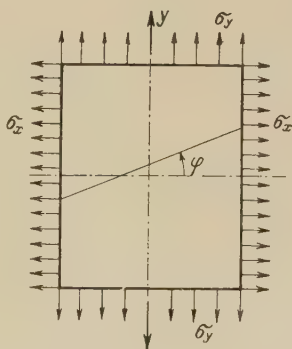


Abb. 106.

Die beiden Hauptrichtungen des Spannungszustandes sind durch $\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min}$ bzw. $\tau = 0$ charakterisiert. Sie stehen aufeinander senkrecht und fallen in Abbildung 106 mit den Koordinatenachsen zusammen.

Die Hauptdehnungen fallen mit den Hauptspannungen zusammen.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_y \right).$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_x \right).$$

1. Aufgabe.

An einem Eisenbügel ist ein Kupferdraht von 1 m Länge und 10 mm² Querschnitt eingespannt. Bei 15° C beträgt die Spannung des Drahtes 12 kg.

Auf welche Temperatur muß man die ganze Vorrichtung bringen, damit der Draht gerade spannungslos wird?

Welche Zugkraft hat ferner der Draht bei —15° C aufzunehmen?

Die Formänderung des Eisenbügels infolge der Zugkraft des Kupferdrahtes ist zu vernachlässigen.

$E_{\text{Cu}} = 1150000 \text{ at}$; Längenausdehnungskoeffizient für 1° Temp.-Änderung:

$$\text{Kupfer: } \alpha_{\text{Cu}} = 16,5 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{Eisen: } \alpha_{\text{Fe}} = 12,0 \cdot 10^{-6}$$

Lösung:

$S_{15^\circ} = 12 \text{ kg}$ entspricht einer Zugspannung

$$\sigma = \frac{S}{F} = \frac{12}{0,1} = 120 \text{ at}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = (\alpha_{\text{Cu}} - \alpha_{\text{Fe}}) \cdot t,$$

oder

$$\frac{120}{1150000} = (16,5 - 12) \cdot 10^{-6} \cdot t,$$

woraus die Temperaturerhöhung $t = 23,2^\circ \text{ C}$ folgt. Bei $t_0 = 15^\circ + 23,2^\circ = 38,2^\circ$ wird der Draht spannungslos.



Abb. 107.

Bei -15°C erhöht man die Spannung des Kupferdrahtes, indem man vom spannungslosen Zustand ausgehend eine Temperaturänderung von $38,2^{\circ} + 15^{\circ} = 53,2^{\circ}$ annimmt.

$$\frac{\sigma_{-15^{\circ}}}{E} = (\alpha_{\text{Cu}} - \alpha_{\text{Fe}}) \cdot 53,2^{\circ};$$

daraus

$$\sigma_{-15^{\circ}} = 1,15 \cdot 10^6 \cdot 4,5 \cdot 10^{-6} \cdot 53,2 = 275 \text{ at}$$

also:

$$S_{-15^{\circ}} = 27,5 \text{ kg.}$$

2. Aufgabe.

Ein Kupferring wird auf 135° erwärmt und paßt dann genau auf eine eiserne Welle, die die Temperatur 20°C besitzt.

- Welche Ringspannung wird im Kupferring herrschen, wenn er sich auf 20°C abgekühlt hat?
- Wie ändert sich die Spannung im Ring, wenn die ganze Schrumpfung auf 0°C abgekühlt wird?
- Bei welcher gemeinsamen Temperatur von Welle und Ring würde die Schrumpfung sich gerade wieder lösen?

$$\alpha_{\text{Fe}} = 125 \cdot 10^{-7} \quad E_{\text{Cu}} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ at}$$

$$\alpha_{\text{Cu}} = 165 \cdot 10^{-7}$$

Lösung:

Die Welle kann gegenüber den auftretenden Belastungen als starr angesehen werden.

a) Hookesches Gesetz für den Kupfering:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} \text{ mit } \varepsilon = (t_1 - t_0) \cdot \alpha_{\text{Cu}} = \\ &= (135 - 20) \cdot 165 \cdot 10^{-7}, \end{aligned}$$

so daß die Ringspannung im Kupferring $\sigma = E \cdot \varepsilon = 1,1 \cdot 10^6 \cdot 115 \cdot 165 \cdot 10^{-7} = 2090 \text{ at}$ beträgt.

b) Zusätzliche σ -Spannung im Ring infolge Abkühlens von 20° auf 0° :

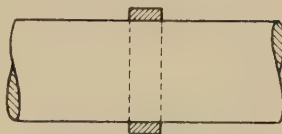


Abb. 108.

$$\sigma_{\text{zus}} = \varepsilon_{\text{zus}} \cdot E_{\text{Cu}} = 20 (\alpha_{\text{Cu}} - \alpha_{\text{Fe}}) E_{\text{Cu}} = 20 \cdot 40 \cdot 10^{-7} \cdot 1.1 \cdot 10^6 = 88 \text{ at},$$

so daß bei 0° die Spannung im Kupferring $\sigma_1 = 2090 \text{ at} + 88 \text{ at} = 2178 \text{ at}$ beträgt.

c) Wird die gemeinsame Temperatur, bei der Lösen des Ringes eintritt, t_2 genannt, so gilt:

$$\frac{\sigma_1}{E_{\text{Cu}}} = t_2 (\alpha_{\text{Cu}} - \alpha_{\text{Fe}}),$$

wenn man $\sigma_1 = 2178 \text{ at}$ einsetzt. Daraus folgt $t_2 = 495^\circ$.

3. Aufgabe.

Auf eine flußeiserne Welle vom Durchmesser d wird bei 30°C ein dünner Aluminiumring von der Breite b und der Dicke h genau passend aufgeschoben.

Die Spannungen im Ring sind zu berechnen, die bei einer Temperatur -30°C auftreten unter der Voraussetzung, daß die durch den Preßdruck des Rings verursachten sehr geringfügigen Formänderungen der Welle vernachlässigt werden.

Elastizitätsmodul von Aluminium:

$$E_A = 700000 \text{ at}.$$

Wärme-Längenausdehnungszahl

von Flußeisen: $\alpha_{\text{Fe}} = 1,2 \cdot 10^{-5}$ pro 1°C

» Aluminium: $\alpha_{\text{Al}} = 2,4 \cdot 10^{-5}$ » » »

Lösung: $\sigma_t = 504 \text{ at}$.

4. Aufgabe.

Der gezeichnete Quader ist in der X-Richtung mit $P_1 = 3875 \text{ kg}$ auf Zug und mit $V_1 = 1875 \text{ kg}$ auf Abscheren, in der Y-Richtung mit $P_2 = -675$ auf Druck und mit $V_2 = 1125 \text{ kg}$ auf Abscheren beansprucht. Die Kräfte sind gleichmäßig über die Seitenflächen verteilt anzunehmen.

Gesucht sind:

1. Lage der Hauptspannungsebenen mit Angabe der Neigungswinkel α_1 und α_2 gegen die X-Achse, sowie die Größe der dazu gehörenden Normalspannungen σ_{max} und σ_{min} .

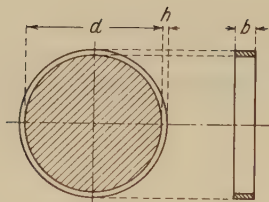


Abb. 109.

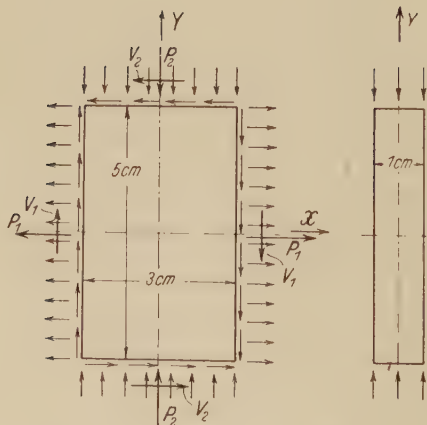


Abb. 110.

2. Ebenen der größten Schubbeanspruchung (Angabe des Neigungswinkels β_1 und β_2 gegen die X-Achse) sowie die Größe von $\tau_{\max}$.

Die Lösung wird zweckmäßig mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises durchgeführt.

Lösung:

$$\sigma_x = \frac{3875}{5} = 775 \text{ at;}$$

$$\sigma_y = -\frac{675}{3} = -225 \text{ at;}$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{1875}{5} = \frac{1125}{3} = 375 \text{ at.}$$

Mohrscher Spannungskreis s. Abb. 111.

Durch die Punkte I (Koordinaten σ_x und τ_1) und II (Koordinaten σ_y und τ_2) ist der Mohrsche Spannungskreis bestimmt.

Man liest ab:

$$\sigma_{\max} = 900 \text{ at;}$$

$$\sigma_{\min} = -350 \text{ at;}$$

$$\tau_{\max} = 625 \text{ at.}$$

Der Neigungswinkel der Hauptspannungsrichtungen gegen die x-Achse beträgt demnach 17° bzw. 73° . Unter 45° dagegen liegen die Ebenen der größten Schubspannungen (s. Abb. 112).

5. Aufgabe.

Der nebenan gezeichnete Quader ist in der X-Richtung mit $P_1 = 9900 \text{ kg}$ auf Zug, in der Y-Richtung mit $P_2 = -2100 \text{ kg}$ auf Druck beansprucht. Diese Kräfte sind gleichmäßig über die Seitenflächen verteilt anzunehmen. Gesucht sind:

- Größe und Richtung der größten und der kleinsten auftretenden Normal- und Schubspannungen (wobei φ = Winkel der Schnitttrichtung gegen die X-Achse).
- Die Spannungen in einer Schnittebene durch die Y-Achse unter dem Winkel $\alpha = 30^\circ$ gegen die Z-Achse.

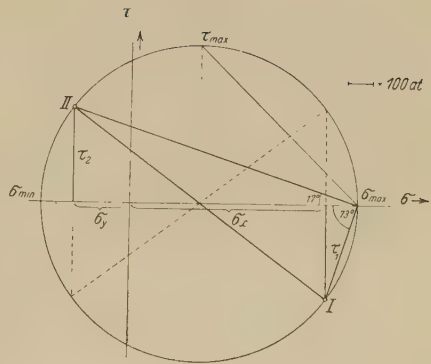


Abb. 111.

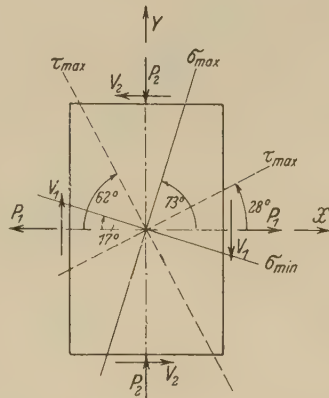


Abb. 112.

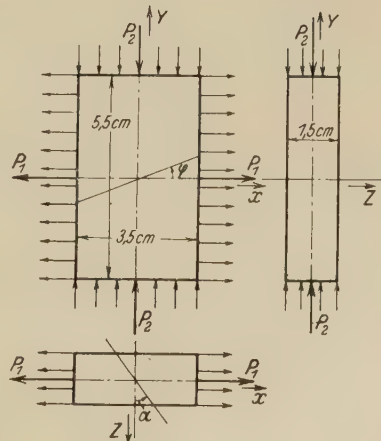


Abb. 113.

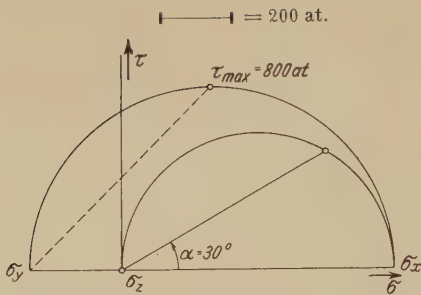


Abb. 114.

Lösung (mittels des Mohrschen Spannungskreises s. Abb. 114):

$$\sigma_x = \frac{P_1}{F_1} = \frac{9900}{5,5 \cdot 1,5} = 1200 \text{ at}$$

$$\sigma_y = \frac{P_2}{F_2} = -\frac{2100}{3,5 \cdot 1,5} = -400 \text{ at.}$$

Schnitt unter $\alpha = 30^\circ$:

$$\sigma = +900 \text{ at.}$$

$$\tau = 520 \text{ at.}$$

§ 2. Spannungen in achsensymmetrischen Kesseln und Schalen.

Wird der innere Überdruck mit p at bezeichnet, die Wandstärke mit h und die Hauptkrümmungsradien mit ϱ_1 bzw. ϱ_2 (s. Abb. 115), so lautet die Gleichgewichtsbedingung fürs Schalelement:

$$1. \frac{\sigma_r}{\varrho_1} + \frac{\sigma_t}{\varrho_2} = \frac{p}{h}.$$

Die zweite Gleichung drückt das Gleichgewicht der senkrecht zur Achse abgeschnittenen Schale aus; sie lautet:

$$2. \sigma_r = \frac{\varrho_2}{2h} \cdot p, \text{ woraus wegen 1. folgt:}$$

$$\sigma_t = \frac{p}{h} \cdot \varrho_2 \cdot \left(1 - \frac{\varrho_2}{2\varrho_1}\right).$$

Für den Zylinderkessel mit $\varrho_1 = \infty$ und $\varrho_2 = r$ folgt daraus:

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{r}{2h} p; \quad \sigma_t = \frac{r}{h} p.$$

Für den Kugelkessel mit

$$\varrho_1 = \varrho_2 = r \text{ wird } \sigma_r = \sigma_t = \frac{r}{2h} \cdot p.$$

1. Aufgabe.

Ein zylindrisches Faß aus Flußeisen wird durch Böden abgeschlossen, deren Meridian ein Korbbogen vom Achsenverhältnis 5:7 bildet. Zu untersuchen ist der Verlauf der Meridianspannung σ_t und der Ringspannung σ_r längs einer Meridiankurve. Gegeben ist:

Innerer Überdruck $p = 6 \text{ at}$.

Die beiden Krümmungshalbmesser des Meridians $\varrho_1 = 120 \text{ mm}$ und $\varrho_1' = 270 \text{ mm}$, Achsen $a = 210 \text{ mm}$ und $b = 150 \text{ mm}$, Wandstärke $h = 1 \text{ mm}$.

Gesucht sind:

- Hauptspannungen am Scheitel B .
- Hauptspannungen am Äquator A .
- Stelle, an der $\sigma_t = 0$ (zeichnerische Ermittlung!).
- Hauptspannungen an der Übergangsstelle C der beiden Kreisbögen.
- Verlauf der Spannungen längs des Meridians.

σ_t und σ_t sind zeichnerisch längs des Meridians senkrecht zu diesem anzutragen.

Lösung:

- a) Hauptspannungen am Scheitel B :

$$\sigma_{rB} = \frac{\varrho_2}{2h} \cdot p = \frac{270}{2} \cdot 6 = 810 \text{ at} = \sigma_{tB}.$$

- b) Am Äquator A :

$$\sigma_{rA} = \frac{\varrho_2}{2h} \cdot p = \frac{210}{2} \cdot 6 = 630 \text{ at};$$

dasselbe σ_{rA} für Zylinder.

$$\begin{aligned} \sigma_{tA} &= \frac{\varrho_2}{h} \cdot p \left(1 - \frac{\varrho_2}{2\varrho_1}\right) = \\ &= \frac{210}{1} \cdot 6 \left(1 - \frac{21}{24}\right) = +157,5 \text{ at}, \end{aligned}$$

dagegen für Zylinder:

$$\sigma_{tA} = \frac{\varrho_2}{h} \cdot p = \frac{210}{1} \cdot 6 = +1260 \text{ at}.$$

- c) An der Stelle D (s. Abb. 117) wird $\sigma_t = 0$.

d) $\sigma_{rC} = \frac{\varrho_2}{2h} p = \sigma_{rB} = 810 \text{ at},$

$$\sigma_{tC \text{ oben}} = \varrho_{tB} = 810 \text{ at}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_{tC \text{ unten}} &= \frac{\varrho_2}{h} p \left(1 - \frac{\varrho_2}{2\varrho_1}\right) = \\ &= \frac{270}{1} \cdot 6 \left(1 - \frac{27}{24}\right) = -202,5 \text{ at}. \end{aligned}$$

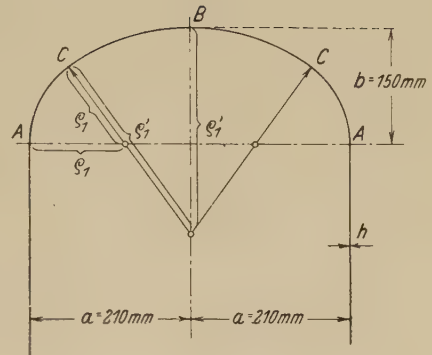


Abb. 116.

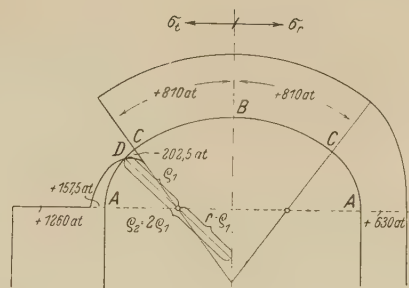


Abb. 117.

Spannungssprung von σ_t :

bei $A = 1102,5 \text{ at}$,

bei $C = 1012,5 \text{ at}$.

Für $\sigma_t = 0$ muß $\varrho_2 = 2\varrho_1$ sein (Punkt D).

Konstruktion s. Zeichnung.

e) s. Abb. 117.

2. Aufgabe.

Ein zylindrisches Exportbierfaß aus Flußeisen hat ellipsoidische Böden vom Achsenverhältnis 1 : 2.

Zu untersuchen ist der Verlauf der Meridianspannung σ_t und der Ringspannung σ_r längs einer Meridiankurve.

Gegeben ist:

$$\begin{aligned} \text{Innerer Überdruck } p &= 6 \text{ at} \\ a &= 200 \text{ mm} \\ b &= 100 \text{ mm} \\ h &= 1 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Formel für den Krümmungshalbmesser des Meridians:

$$\varrho_1 = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}}.$$

Formel für den Querkrümmungshalbmesser:

$$\varrho_2 = \frac{a^2}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}},$$

wobei α = Winkel der Normalen gegen die Achse.

Gesucht sind:

1. Hauptspannungen am Scheitel des Ellipsoids.
2. Hauptspannungen am Äquator des Ellipsoids.
3. Stelle an der $\sigma_t = 0$.
4. Angenäherter Verlauf der Spannungen zwischen diesen Punkten.
5. Ermittlung des Spannungssprunges in A beim Übergang vom elliptischen zum geradlinigen Teil des Meridians.

Lösung:

Krümmungshalbmesser des Meridians am Scheitel und Äquator:

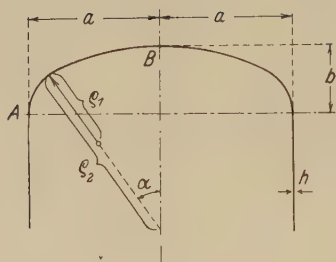


Abb. 118.

a) Scheitel ($\alpha \neq 0$):

$$\varrho_1 = \frac{a^2 b^2}{(b^2)^{3/2}} = \frac{a^2}{b} = 400 \text{ mm};$$

b) Äquator ($\alpha = 90^\circ$):

$$\varrho_1 = \frac{a^2 b^2}{(a^2)^{3/2}} = \frac{b^2}{a} = 50 \text{ mm}.$$

Querkrümmungshalbmesser des Meridians am Scheitel und Äquator:

a) Scheitel:

$$\varrho_2 = \frac{a^2}{(b^2)^{1/2}} = \frac{a^2}{b} = \varrho_1 = 400 \text{ mm};$$

b) Äquator:

$$\varrho_2 = \frac{a^2}{(a^2)^{1/2}} = a = 200 \text{ mm}.$$

1. Hauptspannungen am Scheitel *B*:

Längsspannung

$$\sigma_l = \frac{\varrho_2}{2h} \cdot p = \frac{400}{2} \cdot 6 = 1200 \text{ at};$$

Ringspannung

$$\sigma_t = \frac{\varrho_2}{h} p \left(1 - \frac{\varrho_2}{2\varrho_1} \right) = \frac{\varrho_2}{2h} p = \sigma_l = 1200 \text{ at}.$$

2. Hauptspannungen am Äquator *A*:

$$\sigma_l = \frac{\varrho_2}{2h} p = \frac{200}{2} \cdot 6 = 600 \text{ at}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{\varrho_2}{h} p \left(1 - \frac{\varrho_2}{2\varrho_1} \right) = -\frac{\varrho_2}{h} p = \\ &= -1200 \text{ at}. \end{aligned}$$

3. $\sigma_t = 0$, wenn $1 - \frac{\varrho_2}{2\varrho_1} = 0$ oder

$$\varrho_2 = 2\varrho_1.$$

Durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}} = \\ &= \frac{2a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}}, \end{aligned}$$

woraus

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ oder } \alpha = 35^\circ 10'$$

folgt.

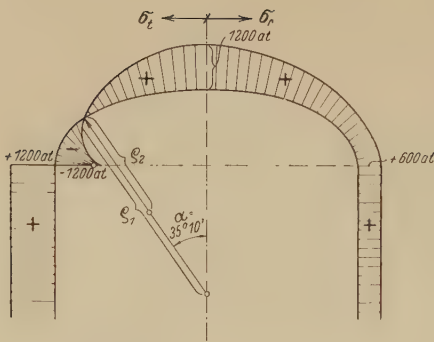


Abb. 119.

4. s. Abb. 119.

5. σ_t erleidet an der Übergangsstelle bei A keinen Sprung, da es nicht von e_1 , sondern nur von e_2 abhängig ist; dagegen macht σ_t , das auch von e_1 abhängig ist, bei A den Sprung von + 1200 at im Zylinder auf - 1200 at im Ellipsoid. Da in Wirklichkeit ein derartiger Sprung nicht auftreten kann, treten hier Biegungsspannungen auf, die aber beiderseits rasch abklingen.

§ 3. Biegung des geraden Stabes und Zentralellipse.

Aus der Bernouillischen Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte, die sich gut mit der Erfahrung deckt, in Verbindung mit dem Hookeschen Gesetz folgt das Geradliniengesetz der Biegungsspannungen im Querschnitt, woraus sich die Kantenspannung $\sigma_0 = \frac{M}{W}$ berechnet. M = Biegemoment für den betreffenden Querschnitt; W = Widerstandsmoment des Querschnittes.

$\sigma_0 = \frac{M}{W}$ gilt für die gerade Biegung, bei der die Lastebene den Querschnitt in einer seiner beiden Hauptachsen schneidet; andernfalls, bei der sog. schiefen Biegung, müssen die Lasten in die beiden Hauptachsen zerlegt und für beide Komponenten obige Gleichung angewandt werden. Durch Überlagerung ergibt sich dann der wirkliche Spannungszustand.

Die bei der allgemeinen Biegung des geraden Stabes im Querschnitt übertragene Querkraft V bringt Schubspannungen hervor, die sich beim rechteckigen Querschnitt parabolisch über den Querschnitt verteilen, so daß an den Kanten die Schubspannung Null und in der Nulllinie ein Maximum ist: $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{b \cdot h}$, wenn mit b und h Breite und

Höhe des Rechteckes bezeichnet werden. Beim Doppel-*T*-Querschnitt (s. Abb. 120) gilt: Schubspannung τ_u im Abstand u von der Nulllinie: $\tau_u = \frac{V \cdot S}{J \cdot b}$, wobei J das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf die Nulllinie und

$$S = \int_{y=u}^{y=y_0} y dF$$

das statische Moment der schraffierten Querschnittsfläche in bezug auf die Nulllinie bedeutet. Dieselbe Formel für τ_u gilt für alle Querschnitte, die sich aus Teilrechtecken zusammensetzen lassen.

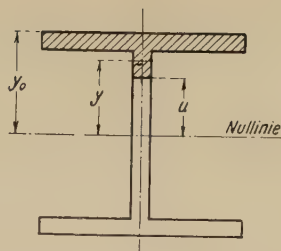


Abb. 120.

1. Aufgabe.

Ein Träger von kreisförmigem Querschnitt ($d = 12$ cm) überbrückt frei aufgelagert eine Spannweite von $l = 3$ m.

Wie groß ist für den dargestellten Belastungsfall die größte auftretende Biegungsspannung $\sigma_{\max}$?



Abb. 121.

Lösung: $\sigma_{\max} = 272$ at im Querschnitt

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

2. Aufgabe.

Ein Flugzeugholm wird durch eine gleichmäßig verteilte vertikal nach oben gerichtete Last $q = 90$ kg/m belastet. Der Querschnitt ist kastenförmig.

Gesucht ist die maximale Biegungsspannung.

Lösung: Die maximale Biegungsspannung tritt im Einspannquerschnitt auf und beträgt $\sigma_{\max} = \pm 517$ at.

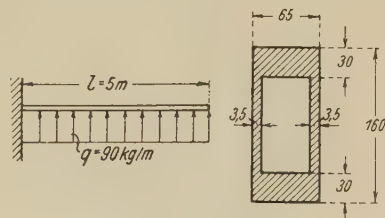


Abb. 122.

3. Aufgabe.

Ein Stab von kreisförmigem Querschnitt wird durch eine exzentrische Last P auf Druck beansprucht. Wie weit darf der Angriffspunkt der Last vom Mittelpunkt nach außen rücken, ohne daß Zugspannungen im Querschnitt auftreten?

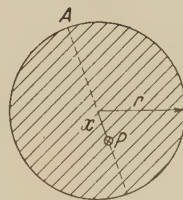


Abb. 123.

Lösung:

$$\sigma_A = \sigma_{\text{Druck}} + \sigma_{\text{Biegung}} = -\frac{P}{r^2 \pi} + \frac{P x}{W},$$

wobei das Widerstandsmoment des kreisförmigen Querschnittes $W = \frac{\pi r^3}{4}$ beträgt.

$\sigma_A = 0$ ergibt $x = \frac{r}{4} = \text{Kernradius.}$

4. Aufgabe.

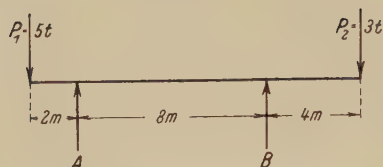


Abb. 124.

An dem gegebenen Balken greifen die Kräfte $P_1 = 5 \text{ t}$; $P_2 = 3 \text{ t}$ an. Gesucht das Widerstandsmoment, wenn σ_{zul} den Wert 600 (at) nicht überschreiten soll.

Lösung:

 M_{max} nur in A oder B:

$$M_A = 2 \cdot 5 = 10 \text{ (mt)}$$

$$M_B = 4 \cdot 3 = 12 \text{ (mt)} = M_{\text{max}} = 1\,200\,000 \text{ (cmkg)}$$

$$W = \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{1\,200\,000}{600} = 2000 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

5. Aufgabe.

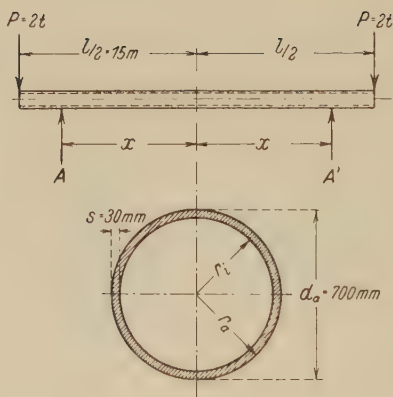


Abb. 125.

Ein mit Wasser gefülltes flußeisernes Rohr vom Außendurchmesser $d_a = 700 \text{ mm}$, der Wandstärke $s = 30 \text{ mm}$ und der Länge $l = 30 \text{ m}$ trägt an den Enden eine zusätzliche Belastung von je $P = 2 \text{ t}$.

Wie groß darf der Abstand $2x$ der beiden symmetrischen Auflager höchstens gewählt werden, damit eine maximale Bieungsbeanspruchung $k_b = 800 \text{ kg/cm}^2$ nicht überschritten wird?

Das spez. Gewicht des Flußeisens ist $\gamma_F = 7850 \text{ kg/m}^3$.

Lösung: Das Widerstandsmoment des ringförmigen Querschnittes ist

$$W = \frac{\pi}{4 r_a} (r_a^4 - r_i^4) = 10\,140 \text{ cm}^3.$$

Gewicht des Rohres pro Meter Länge

$$p_{\text{Rohr}} = 495 \frac{\text{kg}}{\text{m}},$$

Gewicht des Wassers pro Meter Länge

$$q_{\text{Wasser}} = 321,7 \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

$$q = q_{\text{Rohr}} + q_{\text{Wasser}} = 816,7 \frac{\text{kg}}{\text{m}};$$

$$\text{Gesamtlast } q \cdot l = Q = 24,46 \text{ t.}$$

$$A = B = 14,23 \text{ t.}$$

Momentengleichung für den mittleren Querschnitt, in dem das maximale Biegemoment übertragen wird:

$$M_{\text{max}} = Ax - P \frac{l}{2} - q \frac{l^2}{8},$$

andererseits ist $M_{\text{max}} = k_b \cdot W = 81120 \text{ mkg}$, so daß sich $x_{\text{max}} = 14,25 \text{ m}$ berechnet.

6. Aufgabe.

Aus einem Baumstamm vom Durchmesser d soll ein Balken von rechteckigem Querschnitt herausgeschnitten werden. Wie ist das Seitenverhältnis des Rechteckquerschnitts b/h zu wählen, wenn die Tragfähigkeit des Balkens ein Maximum werden soll?

Lösung:

$$b = d \sqrt{\frac{3}{3}};$$

$$h = d \sqrt{\frac{6}{3}}.$$

7. Aufgabe.

Der im Querschnitt gezeichnete Träger (breitflanschiger, dünnstegiger Differdinger Träger Nr. 30) ist an einem Ende fest eingespannt und trägt am 2 m vorkragenden Ende eine Last von $P = 8 \text{ t}$.

Gesucht:

- Trägheitsmoment des Querschnitts.
- Größte überhaupt auftretende Biegungsspannung σ_{max} .
- Für den Einspannquerschnitt:

Biegungsspannung σ_1 , Schubspannung τ_1 und gesamte Anstrengung

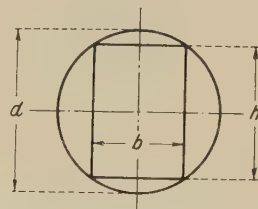


Abb. 126.

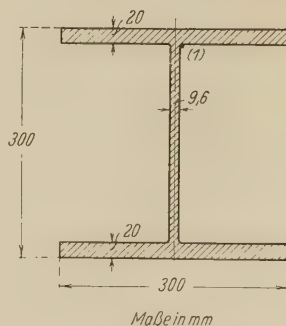


Abb. 127.

σ_{red} für eine Stelle (1) am Übergang vom Steg zum Flansch. $m = \frac{10}{3}$.

Lösung:

- a) $J = 67500 \text{ cm}^4$,
- b) $\sigma_{\text{max}} = 965 \text{ at}$,
- c) $\sigma_1 = 836 \text{ at}$; $\tau_1 = 281 \text{ at}$;
 $\sigma_{\text{red}} = 958 \text{ at}$.

8. Aufgabe.

Ein rechteckiger Balken von der Länge $l = 2,5 \text{ m}$ ist an einem Ende eingespannt und trägt an dem frei vorkragenden Ende eine Last $P = 100 \text{ kg}$, die in Richtung einer Rechtecksdiaagonale wirkt.

In welchem Querschnitt und in welchen Punkten desselben treten die größten Biegungsspannungen auf; wie groß sind diese?

Lösung: Die maximalen Biegungsspannungen treten im obersten bzw. untersten Punkt des Einspannquerschnittes auf; sie betragen $\sigma_{\text{max}} = \pm 320 \text{ at}$.

9. Aufgabe.

Ein Balken mit kastenförmigem Querschnitt kragt um $l = 40 \text{ cm}$ über eine feste Einspannung vor. Er ist am freien Ende mit $P = 1000 \text{ kg}$ belastet.

- a) Wie groß ist die größte auftretende Biegungsspannung σ_{max} ?
- b) Wo tritt die größte Schubspannung τ_{max} auf und wie groß ist sie?
- c) Man gebe für den Punkt 1 des Einspannquerschnittes die Größe von σ und τ an und vergleiche die reduzierte Spannung σ_{red} an dieser Stelle mit σ_{max} .

Lösung:

- a) $J = 1359,3 \text{ cm}^4$, $W = 181,3 \text{ cm}^3$,

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{40000}{181,3} = 220,5 \text{ at}$$

im Einspannquerschnitt.

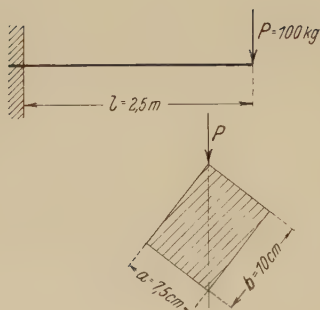


Abb. 128.

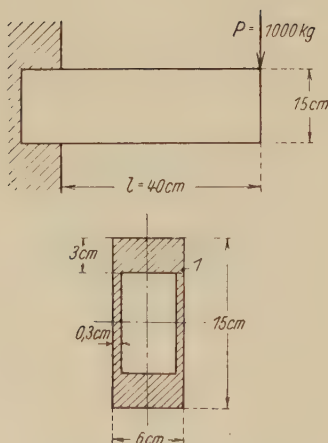


Abb. 129.

$$\begin{aligned} \text{b) } \tau_{\max} &= \frac{V \cdot S_{\max}}{b \cdot J} = \\ &= \frac{1000 \cdot 114,07}{0,6 \cdot 1359,3} = 140 \text{ at} \end{aligned}$$

in der Nulllinie jedes Querschnittes.

$$\begin{aligned} \text{c) } \sigma_1 &= \sigma_{\max} \cdot \frac{4,5}{7,5} = 132,3 \text{ at,} \\ \tau_1 &= \frac{V \cdot S}{b \cdot J} = \\ &= \frac{1000 \cdot 108}{0,6 \cdot 1359,3} = 132,4 \text{ at,} \\ \sigma_{\text{red}} &= 0,35 \sigma_1 + \\ &+ 0,65 \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + 4 \tau_1^2} = 239 \text{ at.} \end{aligned}$$

10. Aufgabe.

Das Untergestell eines 4achsigen Schienenwagens ist in den Punkten *A* und *B*, in denen sich die Zapfen der Drehgestelle befinden, als aufgelagert anzunehmen. Der

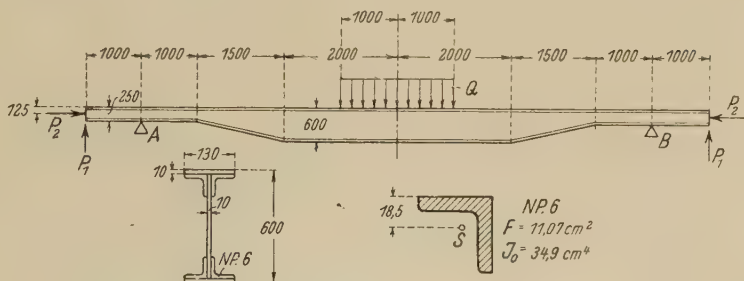


Abb. 130.

vollwandige Blechträger ist aus einem Stehblech von veränderlicher Höhe, 2 Gurtplatten und 4 Gurtwinkel zusammenge-nietet.

Die Belastung setzt sich aus folgenden Lasten zusammen:

1. Im mittleren Abschnitt gleichmäßig verteilte Nutzlast . . . $Q = 12 \text{ t}$
2. Vertikale Pufferkraft . $P_1 = 2 \text{ t}$
3. Horizontale Pufferkraft $P_2 = 50 \text{ t}$

Gesucht ist:

1. Verlauf des gesamten Bieugungs-momentes längs des Trägers (graphisch dargestellt),

2. maximales Bieugungsmoment,
3. maximale Bieugungsspannung.

Lösung:

1. Auflagerkräfte

$$A = B = \frac{1}{2} (Q - 2 P_1) = 4 \text{ t.}$$

Der Verlauf des Bieugungsmomentes (s. Abb. 131.)

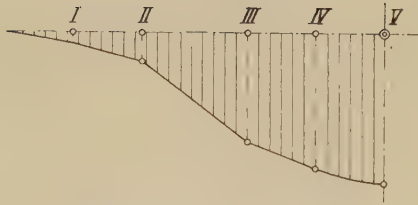


Abb. 131.

$$\begin{aligned} \text{I } M_B &= P_1 \cdot 1,0 = 2 \text{ mt} \\ \text{II } M_B &= P_1 \cdot 2,0 + A \cdot 1,0 = 8 \text{ mt} \\ \text{III } M_B &= P_1 \cdot 3,5 + A \cdot 2,5 + \\ &\quad + P_2 \cdot 0,175 = 25,75 \text{ mt} \\ \text{IV } M_B &= P_1 \cdot 4,5 + A \cdot 3,5 + \\ &\quad + P_2 \cdot 0,175 = 31,75 \text{ mt} \\ \text{V } M_B &= P_1 \cdot 5,5 + A \cdot 4,5 + \\ &\quad + P_2 \cdot 0,175 - \frac{Q}{2} \cdot 1,0 = 34,75 \text{ mt.} \end{aligned}$$

$$2. M_{B_{\max}} = 34,75 \text{ mt.}$$

3. An den Trägereenden ist das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} J_1 &= 4 \cdot (34,9 + 9,65^2) + \frac{1 \cdot 23^3}{12} + \\ &+ 2 \cdot \left(\frac{13 \cdot 1^3}{12} + 13 \cdot 1 \cdot 12^2 \right) = 9000 \text{ cm}^4, \end{aligned}$$

woraus an der Stelle II

$$\sigma_{11} = \frac{M}{W} = \frac{800000 \cdot 12,5}{9000} = 1110 \text{ at}$$

folgt.

In der Trägermitte ist das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} J_2 &= 4 \cdot (34,9 + 27,15^2) + \frac{1 \cdot 58^3}{12} + \\ &+ 2 \cdot \left(\frac{13 \cdot 1^3}{12} + 13 \cdot 1 \cdot 29,5^2 \right) = 71500 \text{ cm}^4, \end{aligned}$$

woraus im mittleren Querschnitt V

$$\sigma_V = \frac{M}{W} = \frac{3475000 \cdot 30}{71500} = 1460 \text{ at}$$

als maximale Bieugungsspannung folgt.

11. Aufgabe.

Für den breitflanschigen Differdinger Träger Nr. 30 soll die Zentralellipse konstruiert werden.

Lösung:

$$J_x = 25\,300 \text{ cm}^4 \quad F = 151,2 \text{ cm}^2$$

$$J_y = 9004 \text{ cm}^4$$

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = 12,9 \text{ cm} \perp \text{X-Achse}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = 7,7 \text{ cm} \perp \text{Y-Achse.}$$

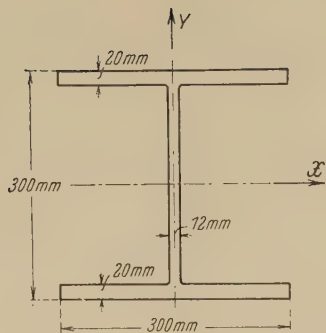


Abb. 132.

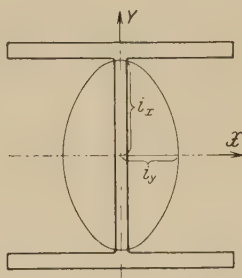


Abb. 133.

12. Aufgabe.

Für das T-Eisen N.P. 7, 31½ soll die Zentralellipse konstruiert werden.

Lösung: $z_s = 0,813 \text{ cm}$; $J_y = 5,12 \text{ cm}^4$ (in bezug auf die zur Y-Achse parallele Schwerachse!)

$$J_z = 17,2 \text{ cm}^4$$

$$i_y = 0,93 \text{ cm}$$

$$i_z = 1,70 \text{ cm.}$$

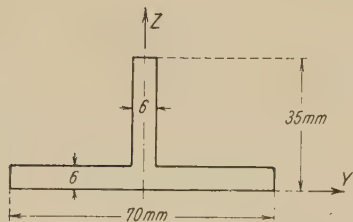


Abb. 134.

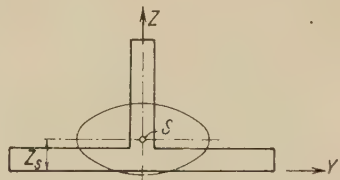


Abb. 135.

§ 4. Elastische Linie des ursprünglich geraden Stabes bei der Biegung.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x).$$

Die bei der zweimaligen Integration auftretenden Konstanten müssen aus den Grenzbedingungen ermittelt werden. Da sich der Ausdruck für das Biegemoment $M(x)$ beim Überschreiten einer Einzellast ändert, so gilt für jeden zwischen zwei Einzellasten liegenden Teil des Balkens eine besondere Differentialgleichung. In diesem Falle ist die graphische Konstruktion nach Mohr vorzuziehen: Man zeichnet ein erstes Seileck zu der gegebenen Belastung des Balkens und benützt die zugehörige Momentenfläche als Belastungsfläche für ein zweites Seileck. Wird der beliebig zu wählende Horizontalzug des ersten Seilecks H_1 genannt, so ist damit und mit der gegebenen Biegesteifigkeit des Balkens EJ der Horizontalzug H_2 des zweiten Seilecks bestimmt:

$$H_2 = \frac{EJ}{H_1}.$$

Das zweite Seileck bzw. Seilkurve ist dann die gesuchte elastische Linie. Diese Konstruktion beruht auf der Übereinstimmung der obigen Differentialgleichung der elastischen Linie des Balkens mit der der Seilkurven:

$$H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -q(x),$$

wobei H den Horizontalzug des Seiles und q die gegebene Belastung des Seiles darstellt.

Die graphische Konstruktion verlangt eine passende Verzerrung für das zweite Seileck (s. Aufgaben 4 bis 7).

Die graphische Konstruktion eignet sich auch gut bei veränderlichem Querschnitt (s. Aufgabe 7).

1. Aufgabe.

Für einen einseitig eingespannten Balken von der Länge $l = 3$ m und der eingezeichneten Beanspruchung ist die Gleichung der elastischen Linie aufzustellen und aus dieser abzuleiten:

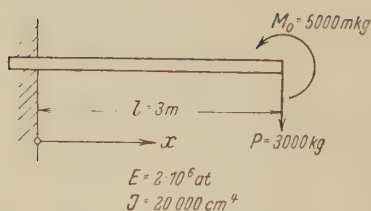


Abb. 136.

- a) Die Größe der Durchbiegung f am freien Ende sowie die Neigung φ der elastischen Linie in diesem Punkt;
 b) die Stelle der größten Durchbiegung $f_{\max}$, der größten Neigung $\varphi_{\max}$ und der stärksten Krümmung der elastischen Linie.
 c) Welchen Wert M_0' müßte M_0 (bei konstantem P) annehmen, damit das freie Ende keine Durchbiegung erfährt?

Lösung:

$EJ y'' = -M(x) = -(M_e + P \cdot x)$,
 wobei das Einspannmoment

$$M_e = M_0 - Pl = 5000 - 9000 = -4000 \text{ mkg.}$$

$$EJ y' = -M_e \cdot x - P \frac{x^2}{2};$$

da $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0$, muß $C_1 = 0$ sein.

$$EJ y = -M_e \frac{x^2}{2} - P \frac{x^3}{6};$$

da $y_{x=0} = 0$, muß $C_2 = 0$ sein.

$$\begin{aligned} \text{a) } f = y_{x=l} &= -\frac{l^2}{EJ} \left(\frac{M_e}{2} + \frac{Pl}{6} \right) = \\ &= -\frac{90000}{2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^4} (-200000 + 150000) \text{ cm} \\ &= \frac{9 \cdot 5}{400} \text{ cm} = 1,125 \text{ mm.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi = (y')_{x=l} &= -\frac{l}{EJ} \left(M_e + \frac{Pl}{2} \right) = \\ &= -0,000375. \end{aligned}$$

Das Minuszeichen deutet an, daß die Richtung der Endtangente nach oben geht.

b) $f_{\max}$ dort, wo $y' = 0$

$$(Pl - M_0)x - \frac{P}{2}x^2 = 0.$$

$x_1 = 0$ entspricht der Einspannstelle, hier ist f ein Minimum

$$x_2 = \frac{Pl - M_0}{P} = 2 \left(l - \frac{M_0}{P} \right) =$$

$$= 2 \left(3 - \frac{5}{3} \right) = \frac{8}{3} \text{ m.}$$

(Durch Einsetzen erhält man

$$f_{\max} = 0,1186 \text{ cm.})$$

$\varphi_{\max}$ dort, wo $y'' = 0$

$$Pl - Px - M_0 = 0$$

$$x = \frac{Pl - M_0}{P} = l - \frac{M_0}{P} = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \text{ m.}$$

$$\varphi_{\max} = \frac{+2}{3000} = 0,00067$$

An dieser Stelle muß ein Wendepunkt der elastischen Linie sein; tatsächlich ist hier auch $M = 0$.

$Q_{\max}$ dort, wo das Moment am größten

$$\text{da } \frac{dM}{dx} = P,$$

Es liegt kein mathematisches Maximum vor; also tatsächliches Maximum an einem der beiden Enden:

Einsp.: $M_E = -4000 \text{ mkg}$; freies Ende $M = M_0 = 5000 \text{ mkg}$.

Größte Krümmung also am freien Ende.

c) f wird $= 0$, wenn

$$\frac{Pl}{3} - \frac{M_0'}{2} = 0; M_0' = \frac{2}{3} Pl = 6000 \text{ mkg}$$

mit dem gleichen Vorzeichen wie das gegebene M_0 .

Graphische Darstellung s. Abb. 137.

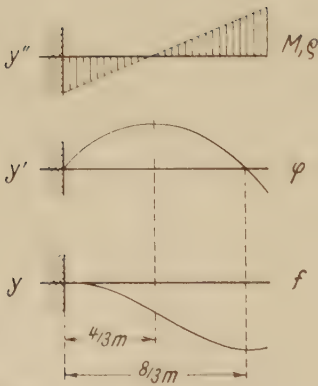


Abb. 137.

2. Aufgabe.

Ein an beiden Enden unnachgiebig eingespannter Holzbalken von rechteckigem Querschnitt ($b = 20 \text{ cm}$, $h = 25 \text{ cm}$) überbrückt eine Spannweite von 10 m und trägt eine über die ganze Länge gleichmäßig verteilte Belastung von 4500 kg . In der Mitte ist er außerdem durch ein

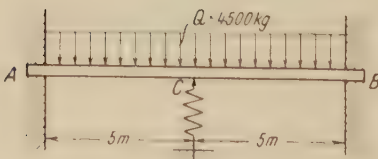


Abb. 138.

Auflager C unterstützt, das im Gegensatz zu den festen Einspannstellen A und B unter einer Belastung von 1000 kg eine elastische Zusammendrückung von 0,4 cm erfährt.

Wie groß wird die Auflagerkraft C , wenn im unbelasteten Zustand die drei Auflager A , B , C auf einer Horizontalen liegen?

$$E_{\text{Holz}} = 120000 \text{ at.}$$

Lösung: Durchbiegung des Balkens f_1
 = Zusammendrückung der Feder f_2 .

$$f_1 = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{384} = \frac{C}{EJ} \cdot \frac{l^3}{192}.$$

$f_2 = C \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}$, wenn C in kg ausgedrückt wird.

Aus $f_1 = f_2$ folgt $C = 1815 \text{ kg}$; damit folgt für die Senkung des mittleren Querschnittes $\delta = C \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ cm} =$

$$1,815 \cdot 0,4 = 0,726 \text{ cm.}$$

3. Aufgabe.

Eine rechteckige Öffnung wird von zwei sich in der Mitte überkreuzenden und an dieser Stelle miteinander verbundenen Trägern mit den Ordnungsnummern 1 und 2 überdeckt. Dabei ist anzunehmen, daß Träger 1 beiderseits fest eingespannt, Träger 2 dagegen frei aufgelagert ist.

Ferner sei:

$$l_1 = 2 \cdot l_2; \quad J_1 = 3 \cdot J_2.$$

An der Kreuzungsstelle wird eine Last $P = 1000 \text{ kg}$ aufgebracht; wieviel davon entfällt auf jeden der beiden Träger?

Lösung: Die Durchbiegungen beider Träger in der Mitte müssen einander gleich sein. Wird der Anteil von P , den Träger 1 aufzunehmen hat, mit P_1 bezeichnet, so ergibt sich $P_1 = 600 \text{ kg}$; demnach

$$P_2 = 400 \text{ kg.}$$

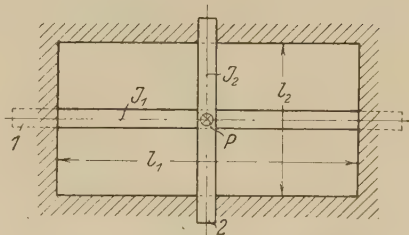


Abb. 139.

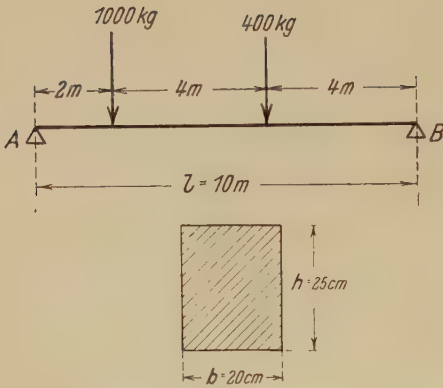


Abb. 140.

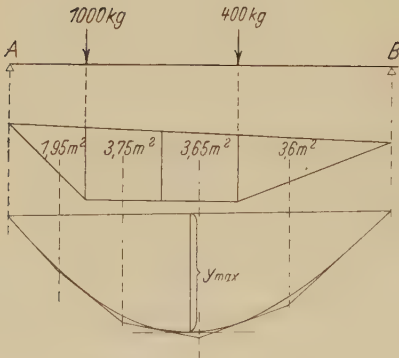


Abb. 141.

4. Aufgabe.

Für den gezeichneten Balkenträger ist die elastische Linie, sowie Ort und Größe der größten Durchbiegung zu bestimmen.

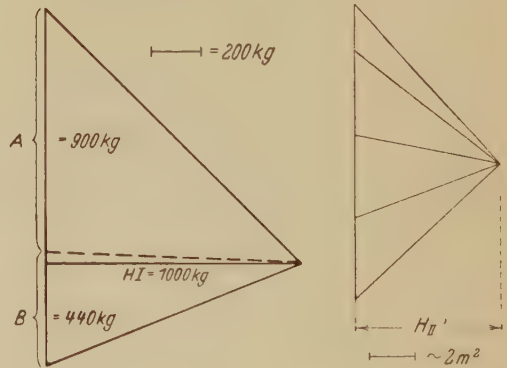
Gegeben:

Querschnittsfläche rechteckig;

$b = 20\text{ cm}$

$h = 25\text{ cm}$

Elastizitätsmodul $E = 120000\text{ at}$
(Fichtenholz).



Lösung:

$$H_{II} = \frac{E J}{H_I} = 3120000\text{ cm}^2$$

$$H_{II}' = \frac{1}{50} H_{II} =$$

$$= 62400\text{ cm}^2 = 6,2\text{ m}^2.$$

$$f_{\max} = 6,3\text{ cm bei } x = 4,7\text{ m}.$$

5. Aufgabe.

Für den mit seiner Belastung gegebenen Gerberträger ist die elastische Linie in geeigneter Verzerrung zu zeichnen.

Lösung:

$$H_{II}' = \frac{1}{100} \frac{EJ}{H_I} = 2,4 \text{ m}^2.$$

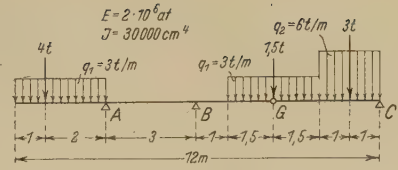


Abb. 142.

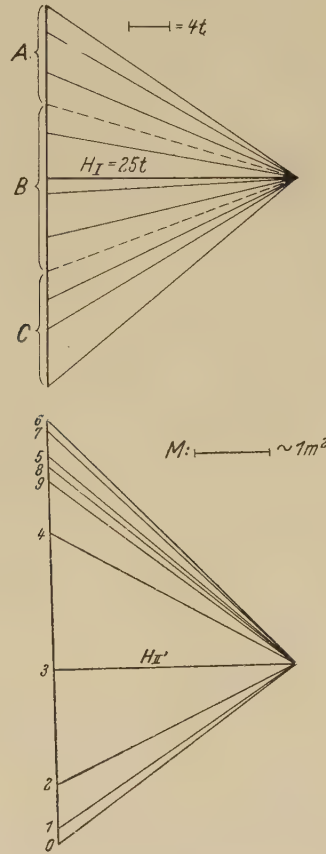


Abb. 143.

Durchbiegungen 100fach überhöht.
 $f_{\max}$ im Gelenk = 3,0 cm.

6. Aufgabe.

Für den mit seiner Belastung gegebenen Gerberträger ist die elastische Linie in geeigneter Verzerrung zu zeichnen.

$$E = 2,10^6 \text{ at}; J = 30000 \text{ cm}^4.$$

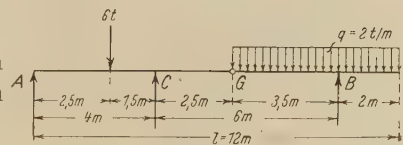


Abb. 144.

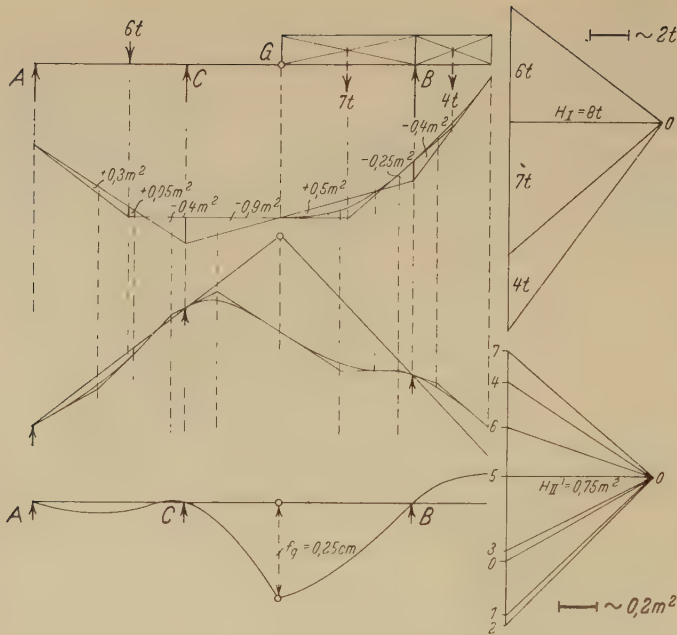


Abb. 145.

Lösung:

$$H_{II}' = \frac{1}{1000} \cdot \frac{EJ}{H_I} = 0,75 \text{ m}^4.$$

Überhöhung der elastischen Linie 1000-fach; die Durchbiegungen erscheinen wegen des Lageplanmaßstabes 1 : 200 in 5-facher nat. Größe.

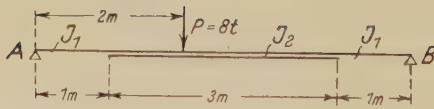


Abb. 146.

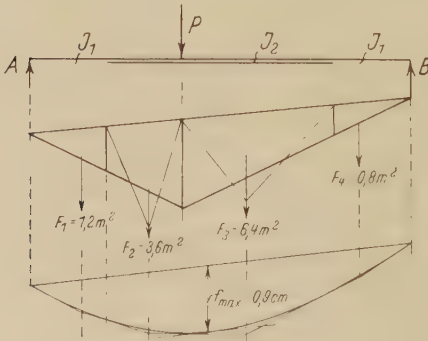


Abb. 147a.

7. Aufgabe.

Für den skizzierten Balkenträger von wechselndem Trägheitsmoment J_1 u. J_2 ist die elastische Linie zu zeichnen. Empfohlen wird:

Maßstab des Lageplanes: 1 : 100.
Verzerrung: 100fach.

$$\begin{aligned} E &= 2 \cdot 10^6 \text{ at} \\ J_1 &= 6000 \text{ cm}^4 \\ J_2 &= 12000 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

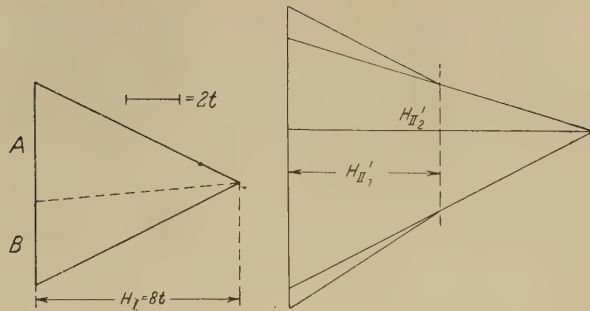


Abb. 147b.

Lösung:

$$H_{II'1} = \frac{1}{100} \cdot \frac{E J_1}{H_I} = 1,5 \text{ m}^2$$

$$H_{II'2} = \frac{1}{100} \cdot \frac{E J_2}{H_I} = 3 \text{ m}^2.$$

Die Durchbiegungen erscheinen also bei 100facher Verzerrung in natürlicher Größe,

§ 5. Die Formänderungsarbeit, der Satz von Castigliano und statisch unbestimmte Aufgaben.

Der allgemeine Satz von Castigliano lautet: $\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i$; darin bedeutet A die von den Lasten in dem Körper aufgespeicherte Formänderungsarbeit, P_i eine Last und y_i die Verschiebung ihres Angriffspunktes in Richtung der Last.

Beim speziellen Satz von Castigliano wird die Formänderungsarbeit nach einer statisch unbestimmten Auflagerkraft X differentiiert. Da die Verschiebung ihres Angriffspunktes in Richtung der Kraft X Null ist, lautet die Beziehung jetzt $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$. (Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit.)

Dieser Satz von Castigliano wird zur Lösung statisch unbestimmter Aufgaben mit Vorteil verwendet. Er gilt auch noch, wenn X eine statisch unbestimmte innere Kraft oder inneres Mo-

ment bedeutet. (S. Aufgabe 8.) Die Formänderungsarbeit eines auf Zug oder Druck P beanspruchten Balkens von der Länge l und dem Querschnitt F beträgt $A = \frac{P^2 \cdot l}{2EF}$. Die Formänderungsarbeit eines auf Biegung beanspruchten Stabes berechnet sich entweder nach der Formel $A = \frac{1}{2} \sum P_i y_i$, worin y_i die Verschiebungen der Angriffspunkte der Lasten P_j in Richtung der Lasten bedeutet, oder nach der Integralformel:

$$A = \int_{s=0}^{s=L} \frac{M_b^2}{2EJ} ds,$$

worin M_b das Biegemoment bedeutet. Die Integration erstreckt sich über die ganze Stablänge L . Die Formel ist für gerade und krumme Stäbe anwendbar.

Die Formänderungsarbeit infolge des Torsionsmomentes M_t ist entsprechend:

$$A = \int_{s=0}^{s=L} \frac{M_t^2}{2GJ_p} ds,$$

worin G = Schubelastizitätsmodul und J_p = polares Trägheitsmoment des Querschnittes.

Sie gilt nur für gerade oder krumme Stäbe mit kreis- oder kreisringförmigem Querschnitt.

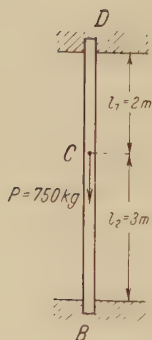


Abb. 148.

1. Aufgabe.

Ein vertikaler Stab ACB von 5 cm^2 Querschnitt ist an den Enden unverschieblich eingespannt und trägt eine Last $P = 750 \text{ kg}$ in C in Richtung der Stabachse. Wie groß werden die Auflagerkräfte D und B ?

Lösung:

1. Mit Hilfe der Formänderung:

Aus $\Delta l_1 = \Delta l_2$ folgt wegen

$$\Delta l_1 = l_1 \cdot \frac{\sigma_1}{E} = l_1 \cdot \frac{D}{EF}$$

und

$$\Delta l_2 = l_2 \cdot \frac{\sigma_2}{E} = l_2 \cdot \frac{B}{EF}$$

$$\frac{D}{B} = \frac{l_2}{l_1};$$

da anderseits $D + B = P$, so ist

$$D = \frac{3}{5} P = 450 \text{ kg};$$

$$B = \frac{2}{5} P = 300 \text{ kg}.$$

2. Mit Hilfe der Formänderungsarbeit
(Satz von Castigliano): Die ganze Form-
änderungsarbeit ist

$$A = \frac{D^2 l_1}{2 EF} + \frac{B^2 l_2}{2 EF};$$

dazu tritt:

$D + B = P$, so daß

$$A = \frac{(P - B)^2}{2 EF} l_1 + \frac{B^2 l_2}{2 EF}.$$

Aus

$$\frac{\partial A}{\partial B} = 0 = -(P - B) l_1 + B l_2$$

folgt:

$$B = P \frac{l_1}{l_1 + l_2} = \frac{2}{5} P = 300 \text{ kg},$$

$$D = P - B = 450 \text{ kg}.$$

2. Aufgabe.

Gegeben ist nebenstehender statisch bestimmt gelagerter Rahmenträger, der längs des horizontalen Teiles mit $q = 3000 \text{ kg/m}$ belastet ist. Zu berechnen ist die Verschiebung Δl des Rollenlagers, wenn noch gegeben ist:

$$E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ at}; \quad J = 25000 \text{ cm}^4.$$

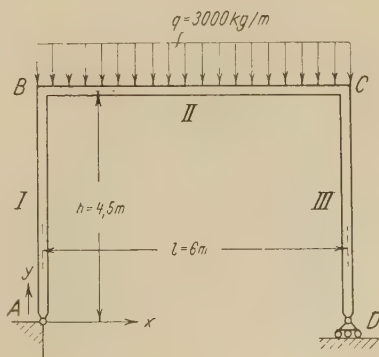


Abb. 149.

Lösung (nach Castigliano): Zu dem Zwecke wird im Rollenlager D eine horizontal angreifende Hilfskraft H angebracht, der eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft H im Gelenk A Gleichgewicht hält.

Dann gilt für Teil I und III:

$$M_I = M_{III} = H \cdot y; \quad \frac{\partial M_I}{\partial H} = \frac{\partial M_{III}}{\partial H} = y.$$

$$M_{II} = H \cdot h + \frac{ql}{2} x - \frac{q}{2} x^2; \quad \frac{\partial M_{II}}{\partial H} = h.$$

$$\Delta l = \left(\frac{\partial A}{\partial H} \right)_{H=0},$$

wobei

$$A = \int_{s=0}^{s=L} \frac{M^2}{2 E J} ds; \quad \frac{\partial A}{\partial H} = \int_{s=0}^{s=L} M \frac{\partial M}{\partial H} \frac{1}{E J} ds$$

$$\begin{aligned} \Delta l = & \frac{1}{E J} \left[\int_{y=0}^{y=h} M_I \frac{\partial M_I}{\partial H} dy + \right. \\ & + \int_{x=0}^{x=l} M_{II} \cdot \frac{\partial M_{II}}{\partial H} dx + \\ & \left. + \int_{y=0}^{y=h} M_{III} \frac{\partial M_{III}}{\partial H} dy \right]_{H=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta l = & \frac{1}{E J} \left[0 + h \frac{q}{2} \int_{x=0}^{x=l} (lx - x^2) dx + 0 \right] = \\ = & \frac{h}{2 E J} \cdot q \left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{3} \right) = \frac{h \cdot l^3}{12 E J} q = 4,42 \text{ cm.} \end{aligned}$$

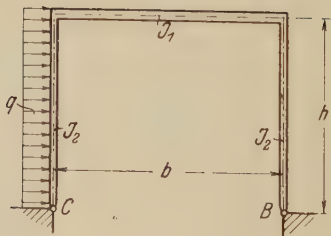


Abb. 150.

3. Aufgabe.

Eine Halle von rechteckigem Querschnitt ($b = 6 \text{ m}$, $h = 5 \text{ m}$) ist in Abständen von je 8 m durch Rahmenträger versteift. Das Trägheitsmoment eines jeden Rahmenträgers beträgt in den vertikalen Teilen J_2 und im waagrechten Teil J_1 ; gegeben ist $J_1/J_2 = 2$.

Für einen horizontalen Winddruck von 125 kg/m^2 sind die waagrechten und senkrechten Komponenten der Auflagerkräfte B und C für einen Träger sowie die Momentenverteilung längs der Trägerachse zu ermitteln.

Lösung: $q = 8 \cdot 125 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$; Gesamtwindlast $Q = q \cdot h = 5000 \text{ kg}$.

$$B_y = Q \cdot \frac{h}{2b} = 2080 \text{ kg} = -C_y.$$

$B_x = H$ ist die statisch Unbestimmte, die sich nach Castigliano berechnet zu $B_x = 1415 \text{ kg}$; daraus folgt $C_x = Q - B_x = 3585 \text{ kg}$.

Momentenverteilung s. Abb. 151.

4. Aufgabe.

Nebestehender Tragmast hat kreisringförmigen Querschnitt (Durchmesser $D = 75 \text{ mm}$; Wandstärke $\delta = 15 \text{ mm}$).

Das flußeiserne Material besitzt ein $E = 2,15 \cdot 10^6 \text{ at}$.

Gesucht ist:

- Die vertikale Verschiebung f_y ,
- die horizontale Verschiebung f_x , die der Punkt C unter der Wirkung der vertikalen Last $P \approx 100 \text{ kg}$ erfährt.

Lösung: Am einfachsten nach Castigliano:

- $f_y = 3,3 \text{ cm}$.
- $f_x = 1,8 \text{ cm}$.

$$f_x \text{ ist für } h \begin{cases} > r\sqrt{2} \text{ nach rechts gerichtet} \\ = r\sqrt{2} \text{ null} \\ < r\sqrt{2} \text{ nach links gerichtet.} \end{cases}$$

5. Aufgabe.

Gegeben ist nebenstehender Rahmenträger, der längs des horizontalen Teiles mit $q = 2000 \text{ kg/m}$ belastet ist. Das Querschnittsträgheitsmoment des horizontalen Teiles sei J_1 , das der schrägen Teile J_2 , wobei gegeben ist $J_1/J_2 = 2$. Zu bestimmen sind insbesondere die waagrechte

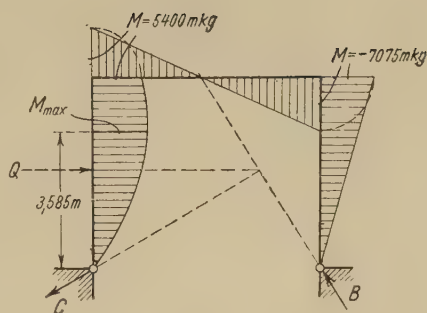


Abb. 151.

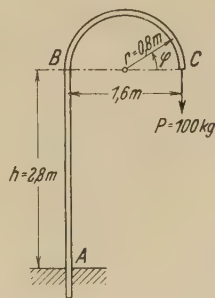


Abb. 152.

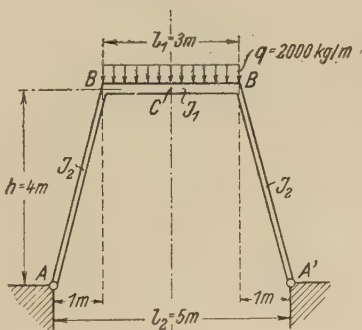


Abb. 153.

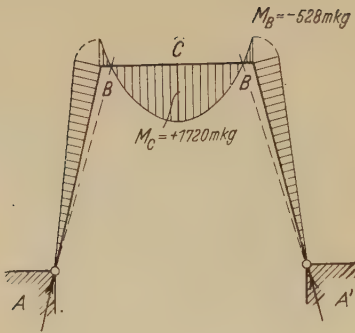


Abb. 154.

Komponente des Auflagerdrucks sowie die Momentenverteilung längs der Trägerachse.

Lösung (nach Castigliano): Als statisch Unbestimmte nimmt man den Horizontalschub H , der sich aus $\frac{\partial A}{\partial H} = 0$ zu $H = 882 \text{ kg}$ berechnet.

Die Momentenverteilung folgt aus Abbildung 154 zu

$$M_B = -528 \text{ mkg}$$

$$M_C = +1720 \text{ mkg}$$

6. Aufgabe.

Zwei gleiche in den Punkten B und D gelenkig verbundene Federn werden durch zwei Einzelkräfte $P = 500 \text{ kg}$ belastet. Gegeben ist ferner:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ at}$$

$$J = 1,0 \text{ cm}^4.$$

Gesucht:

1. Verlauf des Biegemomentes M längs CD , abhängig vom Winkel φ ,
2. Verkürzung Δy der Strecke CE unter der Belastung.

Lösung:

$$1. \quad M_\varphi = \frac{P}{2} \left(\frac{r}{2} - r \sin \varphi \right).$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \Delta y &= \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{4}{EJ} \int_0^{30^\circ} M \frac{\partial M}{\partial P} r d\varphi \\ &= \frac{4}{EJ} \int_0^{30^\circ} \frac{P}{2} \left(\frac{r}{2} - r \sin \varphi \right)^2 r d\varphi = \\ &= \frac{Pr^3}{EJ} \int_0^{30^\circ} \left(\frac{1}{2} - \sin \varphi \right)^2 d\varphi = \\ &= \frac{Pr^3}{EJ} \cdot 0,042 = 0,67 \text{ cm}. \end{aligned}$$

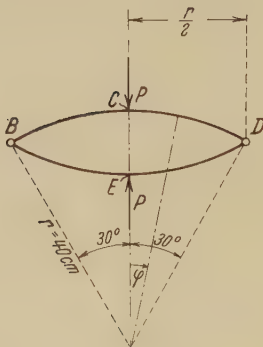


Abb. 155.

7. Aufgabe.

Ein eingespannter Träger $ABCD$ von kreisförmigem Querschnitt ($d = 6$ cm) und der skizzierten Form ($a = 25$ cm) wird am freien Ende D durch eine vertikale Last $P = 3000$ kg belastet.

Wie groß ist die vertikale und die horizontale Verschiebung des Lastangriffspunktes D ? $E = 2 \cdot 10^6$ at.

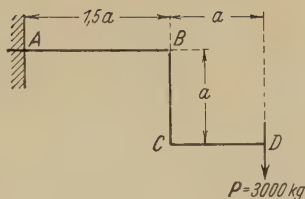


Abb. 156.

Lösung: Die vertikale Verschiebung

$$f_y = 2,28 \text{ cm folgt aus } \frac{\partial A}{\partial P} = f_y.$$

Die horizontale Verschiebung beträgt

$$f_x = 1,15 \text{ cm.}$$

Die Berechnung verlangt das Anbringen einer am Punkt D außer P noch angreifenden horizontalen Hilfskraft H ; alsdann wird die Formänderungsarbeit A , die von beiden Kräften P und H herrührt, nach H differenziert und nachträglich $H = 0$ gesetzt:

$$f_x = \left(\frac{\partial A}{\partial H} \right)_{H=0}.$$

8. Aufgabe.

Der geschlossene Rahmen $ABCD$ von überall gleichem Querschnitt wird durch zwei Einzelkräfte $P = 800$ kg belastet.

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ at; } J = 100 \text{ cm}^4.$$

Gesucht ist:

- Verlauf des Biegemomentes (Skizze),
- maximales Biegemoment $M_{\max}$,
- Verringerung des Abstandes 1—1.

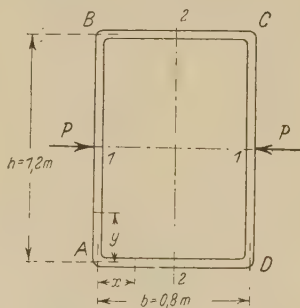


Abb. 157.

Lösung:

a) Wird das in den vier Ecken übertragene Biegemoment mit M_0 bezeichnet und als statisch Unbestimmte gewählt, so gilt

$$M_{AB} = M_0 + \frac{P}{2} y; \quad \frac{\partial M_{AB}}{\partial M_0} = 1.$$

$$M_{BC} = M_0; \quad \frac{\partial M_{BC}}{\partial M_0} = 1.$$

Formänderungsarbeit:

$$A = \frac{2}{EJ} \int_{y=0}^{\frac{h}{2}} M_{AB}^2 \cdot dy + \frac{2}{EJ} \int_{x=0}^{\frac{b}{2}} M_{BC}^2 \cdot dx.$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_0} = 0 = \int_{y=0}^{\frac{h}{2}} M_{AB} \cdot dy + \int_{x=0}^{\frac{b}{2}} M_{BC} \cdot dx =$$

$$= M_0 \cdot \frac{h}{2} + \frac{P}{2} \cdot \frac{h^2}{8} + M_0 \cdot \frac{b}{2},$$

woraus

$$M_0 = -P \cdot \frac{h^2}{8(h+b)}$$

folgt.

$$M_0 = -800 \cdot \frac{120^2}{8 \cdot 200} \text{ cmkg} = -72 \text{ mkg}.$$

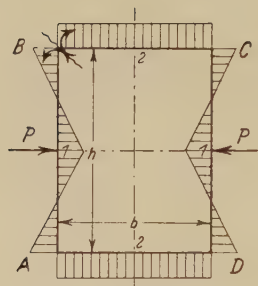


Abb. 158.

$$\text{b) } M_1 = M_0 + \frac{P}{2} \cdot \frac{h}{2} =$$

$$= +168 \text{ mkg} = M_{\max}.$$

Verlauf des Biegemomentes siehe Abb. 158.

c) $\Delta(1-1)$ nach Castigliano:

$$\Delta(1-1) = \frac{\partial A}{\partial P}$$

ergibt

$$\frac{\partial A}{\partial P} = \frac{Ph^3}{EJ} \left(4 - \frac{3h}{h+b} \right) = 0,158 \text{ cm}.$$

9. Aufgabe.

Ein halbkreisförmiger Träger $ABCDE$ ist durch eine gelenkig angeschlossene Zugstange BD versteift.

Trägheitsmoment des

Trägerquerschnitts $J = 100 \text{ cm}^4$,Zugstangenquerschnitt $F = 4 \text{ cm}^2$,Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^6 \text{ at}$.

Gesucht:

1. Kraft S in der Zugstange.
2. Verlauf des Biegemomentes M längs des Trägers, insbesondere das maximale Biegemoment $M_{\max}$.

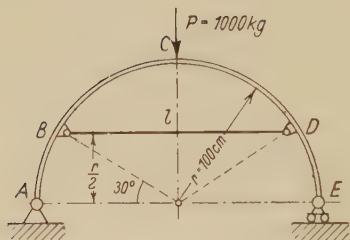


Abb. 159.

Lösung:

1. Zweckmäßig wird die Zugkraft S als statisch Unbestimmte eingeführt. Aus dem Satz von Castigliano leitet man die folgende Beziehung ab:

$$\frac{\partial A}{\partial S} = 0 = -\frac{1}{EJ} \int_{\varphi = -\frac{\pi}{6}}^{\varphi = \frac{\pi}{2}} \frac{P}{2} r (1 - \cos \varphi) \cdot r \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \right) d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \int_{\varphi = -\frac{\pi}{6}}^{\varphi = \frac{\pi}{2}} S r \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \right)^2 r^2 d\varphi + \int_{s=0}^{s=\frac{l}{2}} \frac{S}{EF} ds,$$

woraus $S = 790 \text{ kg}$ folgt.

2. Der Verlauf des Biegemomentes ergibt sich aus Abb. 160.

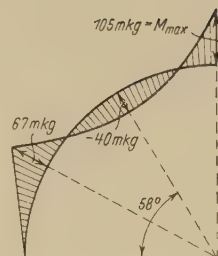


Abb. 160

10. Aufgabe.

Ein Ring von kreisförmigem Querschnitt wird in den Punkten A und B durch gleich große, entgegengesetzt drehende Kräftepaare vom Moment $M_0 = 200 \text{ mkg}$ beansprucht. Der Vektor der Momente M_0 ist tangential an die kreisförmige Mittellinie gerichtet.

Radius der Mittellinie $R = 50 \text{ cm}$,

Durchmesser des Querschnitts

$d = 5 \text{ cm}$,

Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^6 \text{ at}$,

Querdehnungszahl $m = 10/3$.

Gesucht:

1. Biegemoment M_b und Torsionsmoment M_t in einem beliebigen Querschnitt.
2. Verdrehungswinkel α der Querschnitte A und B .

Lösung:

1. In den Querschnitten C und D herrscht reine Biegung vom Moment $\frac{M_0}{2}$.

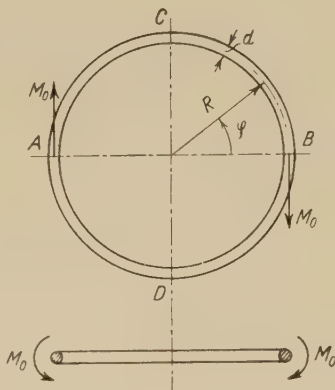


Abb. 161.

In irgendeinem Querschnitt φ wird ein Biegemoment

$$M_b = \frac{M_0}{2} \sin \varphi$$

und ein Torsionsmoment

$$M_t = \frac{M_0}{2} \cos \varphi$$

übertragen.

$$2. \quad \alpha = 2 \cdot \frac{\partial A}{\partial M_0},$$

wenn

$$A = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_b^2}{2 E J} r d\varphi + 2 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_t^2}{2 G J_p} r d\varphi,$$

daraus errechnet man

$$\alpha = 0,029 = 1^{\circ}40'.$$

11. Aufgabe.

Für die beiden durch das Gelenk C zu einem statisch einfach unbestimmten System verbundenen Träger (s. Abb. 162) sind die Auflagerreaktionen, ferner der Momentenverlauf in jedem der Träger zu berechnen.

Lösung: Auf den linken Träger entfallen X kg, wobei X die statisch Unbestimmte ist.

Die Durchbiegung des Gelenkes ist einerseits

$$f_1 = \frac{X \cdot l_1^3}{3 E J_1},$$

andererseits

$$f_2 = \frac{(P - X) l_2^3}{3 E J_2}.$$

Aus $f_1 = f_2$ folgt

$$X = P \frac{J_1 l_2^3}{J_1 l_2^3 + J_2 l_1^3}$$

oder

$$\frac{X}{P - X} = \frac{J_1 l_2^3}{J_2 l_1^3}.$$

Momentenverteilung s. Abb. 163.

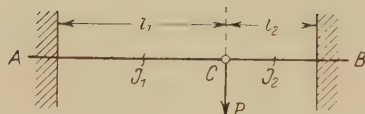


Abb. 162.



Abb. 163.

12. Aufgabe.

Ein homogener, als starr zu betrachtender Balken vom Gewicht $G = 190 \text{ kg}$ und der Länge $2l = 3 \text{ m}$ liegt an den Enden und in der Mitte auf drei Federn auf. Im unbelasteten Zustand liegen die drei Federenden auf einer Horizontalen. Unter einer Belastung von je 100 kg erfährt die erste Feder eine Zusammendrückung von 2 cm , die zweite eine solche von 3 cm , die dritte Feder von 5 cm .

Welche Zusammendrückung wird jede der drei Federn beim Aufbringen des Balkens erfahren und wie verteilt sich das Balkengewicht auf die drei Federn?

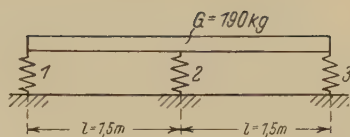


Abb. 164.

Lösung:

$$c_1 = 50 \text{ kg/cm}$$

$$c_2 = 33\frac{1}{3} \text{ »}$$

$$c_3 = 20 \text{ »}$$

$$1. \quad 2x_2 = x_1 + x_3$$

$$2. \quad c_1 x_1 = c_3 x_3 \text{ (Momentenpunkt in der Mitte)}$$

$$3. \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = P$$

$$2c_1 x_1 + c_2 x_2 = P \text{ (aus 2. und 3.)}$$

$$(c_1 + c_3) x_1 - 2c_3 x_2 = 0$$

$$x_1 [4c_1 c_3 + (c_2 + c_3) c_2] = 2c_3 P$$

$$x_1 = \frac{2P}{4c_1 + c_2 + \frac{c_1 c_2}{c_3}} =$$

$$= \frac{2P}{200 + \frac{100}{3} + \frac{280}{3}} = \frac{12}{1900} P [\text{cm}]$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1,2 \text{ cm} \\ x_2 &= \frac{21}{1900} P = 2,1 \text{ cm} \\ x_3 &= 3,0 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} P_1 &= 60 \text{ kg} \\ P_2 &= 70 \text{ »} \\ P_3 &= 60 \text{ »} \end{aligned}$$

13. Aufgabe.

Ein statisch bestimmt gelagerter Träger BC ist durch 5 gelenkig angeschlossene Stäbe versteift.

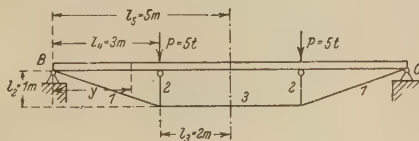


Abb. 166.

Trägheitsmoment des

Trägerquer-

schnitts $J = 30000 \text{ cm}^4$,

Querschnitt des Trä-

gers $F_2 = 120 \text{ cm}^2$,

Querschnitt der fünf

Stäbe $F_1 = 20 \text{ cm}^2$.

Gesucht:

1. Auflagerkräfte in B und C .
2. Stabkräfte S_1 , S_2 , S_3 .
3. Verlauf des Biegemomentes im Balken CB ($M_{\max} = ?$).
4. Maximales Biegemoment, wenn die 5 Stäbe fehlen.

Lösung:

1. $B = C = 5 \text{ t}$.

2. Die Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt. Die statische Unbestimmte

$$X = S_2.$$

Krafteck für die Stäbe s. Abb. 167.

Allgemeine Formeln: Formänderungsarbeit

$$A = \int \frac{M^2}{2EJ} dx + \int \frac{N^2}{2EF} dx$$

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} dx = 0.$$

Die einzelnen Integralanteile ergeben sich aus der Tabelle S. 81.

Durch Summation erhält man:

$$\frac{\partial A}{\partial X} = 0 = X \left(\frac{10 l_1 + l_2 + 9 l_3}{F_1} + \frac{9 l_5}{F_2} + \frac{l_4^3}{3J} + \frac{l_4^2(l_5 - l_4)}{J} \right) - P \left(\frac{l_4^3}{3J} + \frac{l_4^2(l_5 - l_4)}{J} \right),$$

woraus $X = 0,78 P$ folgt.

$$S_1 = 11,9 \text{ t}; \quad S_2 = -3,9 \text{ t};$$

$$S_3 = 11,3 \text{ t}.$$

3. Verlauf des Biegemomentes s. Abb. 168:

$$M_{\max} = 3,7 \text{ mt}.$$

4. Bei fehlenden Versteifungsstäben wäre $M_{\max} = 15 \text{ mt}$.

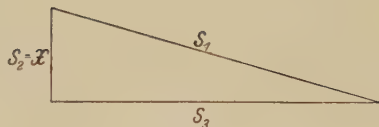


Abb. 167.

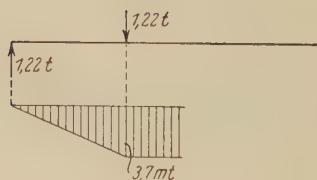


Abb. 168.

		Integrations- weg:	
$S_{1,5} = N_1 = 3, 16 X$	$\frac{\partial N_1}{\partial X} = 3, 16$	$0 \div l_1$	$E \frac{\partial A}{\partial X} = \frac{1}{F_1} \int_0^{l_1} 3, 16^2 X ds = \frac{10 l_1}{F_1} \cdot X$
$S_{2,4} = N_2 = -X$	$\frac{\partial N_2}{\partial X} = -1$	$0 \div l_2$	$\gg = \frac{1}{F_1} \int_0^{l_1} X ds = \frac{l_2}{F_1} \cdot X$
$S_3 = N_3 = 3 X$	$\frac{\partial N_3}{\partial X} = 3$	$0 \div l_3$	$\gg = \frac{1}{F_1} \int_0^{l_1} 9 X ds = \frac{9 l_3}{F_1} \cdot X$
$N_{4,5} = -3 X$	$\frac{\partial N_{4,5}}{\partial X} = -3$	$0 \div l_5$	$\gg = \frac{1}{F_2} \int_0^{l_2} 9 X ds = \frac{9 l_5}{F_2} \cdot X$
$M_4 = (P - x) \cdot y$	$\frac{\partial M_4}{\partial X} = -y$	$0 \div l_4$	$\gg = \frac{1}{J} \int_0^J (X - P) y^2 dy = \frac{X - P}{J} \cdot \frac{l_4^3}{3}$
$M_5 = (P - x) \cdot y + (X - P)(y - l_4) = -(X - P) \cdot l_4$	$\frac{\partial M_5}{\partial X} = -l_4$	$l_4 \div l_5$	$\gg = \frac{1}{J} \int_0^J (X - P) l_4^2 dy = \frac{X - P}{J} \cdot l_4^2 (l_5 - l_4)$

14. Aufgabe.

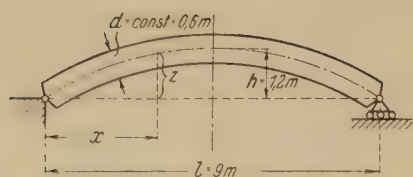


Abb. 169.

Konstanten für Beton:

$$E = 350\,000 \text{ at.}$$

$$\text{spez. Gewicht } \gamma = 2400 \text{ kg/m}^3$$

Wärmeausdehnungskoeffizient:

$$\alpha = 0,000137.$$

Ein Betongewölbe überbrückt eine freie Länge von $l = 9 \text{ m}$ mit einer maximalen Höhe von $h = 1,2 \text{ m}$. Der Bogen kann als Parabelbogen behandelt werden.

- Für den Fall eines Rollenlagers am rechten Ende soll die Horizontalverschiebung Δl dieses Rollenlagers unter dem Einfluß des Eigengewichtes ermittelt werden. Die geringe Normalbeanspruchung ist zu vernachlässigen.
- Für den Fall der beiderseitigen gelenkigen Auflagerung soll die zusätzliche Temperaturspannung ermittelt werden, die bei einer Temperatursteigerung von $t = 40^\circ \text{ C}$ auftritt, wobei jetzt die Normalkraft N zu berücksichtigen ist.

Lösung:

$$\text{a) } \Delta l = \int_L \frac{M \cdot z}{E \cdot J} ds \text{ mit } M = \frac{q l}{2} x - \frac{q x^2}{2}$$

$$\text{und } z = 4 h \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right);$$

für ds kann angenähert dx gesetzt werden.

$$\Delta l = 0,133 \text{ cm.}$$

$$\text{b) } H = \frac{\alpha \cdot t \cdot l}{\int_L \frac{z^2}{E J} ds} = 43,3 \text{ t.}$$

15. Aufgabe.

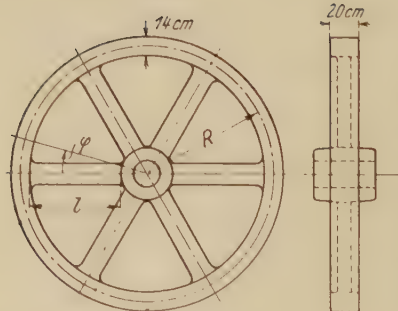


Abb. 170.

Ein Schwungrad vom Radius $R = 1 \text{ m}$ besitzt einen rechteckigen Schwungringquerschnitt von $20 \times 14 \text{ cm}^2$; die 6 Arme von der Länge $l = 0,7 \text{ m}$ haben den konstanten Querschnitt $f = 100 \text{ cm}^2$.

Zu untersuchen ist für eine Drehzahl $n = 300 \text{ U/min}$ unter Berücksichtigung der Normalkraft im Ring und unter Vernachlässigung der Formänderung der Nabe:

- a) Größe der Kraft X in jedem Arm,
 b) Ort und Größe von $M_{\max}$ im Schwungring.
 c) Welche reine Zugbeanspruchung würde im Schwungring auftreten, wenn er ohne Arme rotieren könnte?

Elastizitätsmodul des Materials (Gußeisen)

$$E = 850000 \text{ at},$$

spezifisches Gewicht des Gußeisens:

$$\gamma = 7,83 \text{ g/cm}^3.$$

Lösung:

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{n\pi}{30} = 10\pi.$$

$$\kappa = \frac{F\gamma}{g} \cdot R^2 \omega^2$$

(mit $F = 20 \cdot 14 = 280 \text{ cm}^2$ Ringquerschnitt) bedeutet die auf die Einheit des Winkels φ bezogene Zentrifugalkraft.

$$\kappa = 22050 \text{ kg}.$$

a) Die Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt. Die statische Unbestimmte sei die Kraft X , mit der ein Arm auf Zug beansprucht wird. Man braucht aus Symmetriegründen nur $\frac{1}{6}$ des ganzen Ringes von $\varphi = -30^\circ$ bis $\varphi = +30^\circ$ in Betracht zu ziehen.

Die Formänderungsarbeit A setzt sich zusammen aus der Formänderungsarbeit des Armes:

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{X^2 l}{Ef},$$

der von der Biegung herrührenden Formänderungsarbeit des Ringes

$$A_2 = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=30^\circ} \frac{M_\varphi^2}{2EJ} R d\varphi$$

und der von der Druckbeanspruchung herrührenden Formänderungsarbeit des Ringes:

$$A_3 = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=30^\circ} \frac{(\kappa - X \cos \varphi)^2}{2EF} R d\varphi.$$

Aus $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$ erhält man $X = 5600 \text{ kg}$.

b) $M_{\max} = M_{\varphi=30^\circ} = 504 \text{ mkg}$.

c) $\sigma = \frac{\tau}{F} = \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2$ (also unabhängig von F) = 79 at.

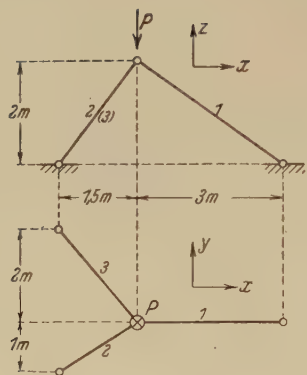


Abb. 171.

16. Aufgabe.

Ein Bockgerüst wird durch eine vertikale Last $P = 5 \text{ t}$ belastet. Die Stabquerschnitte sind je $F = 5 \text{ cm}^2$. Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^6 \text{ at}$.

Gesucht sind die Komponenten Δx , Δy und Δz der Verschiebung des Lastangriffspunktes.

Lösung:

Stab	$l [\text{cm}]$	$r \left[\frac{\text{cm}}{\text{kg}} \right]$	$S [\text{kg}]$	$U_{P_x=1}$	$U_{P_y=1}$	$r S^2$	$r S U_x$	$r S U_y$
1	360	$3,60 \cdot 10^{-5}$	— 3000	— 0,80	0	324	$-8,65 \cdot 10^{-2}$	0
2	270	2,70	— 3000	0,39	0,90	243	3,18	$7,30 \cdot 10^{-2}$
3	320	3,20	— 1800	0,24	— 1,04	103	1,43	— 6,00

Abb. 173 Abb. 174 Abb. 175

670	$-4,04 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-2}$
$= \Sigma r S^2$	$= \Sigma r S U_x$	$= \Sigma r S U_y$

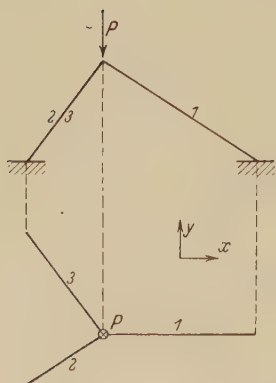


Abb. 172.



Abb. 173.

Formänderungsarbeit von P allein herführend:

$$A = \frac{1}{2} \Sigma r S^2; \text{ daraus}$$

$$\Delta z = \frac{\Sigma r \cdot S^2}{P} = \frac{670}{5000} = 0,134 \text{ cm}$$

$$\Delta x = \frac{\Sigma r S U_{(P_x=1)}}{P_x} = -0,040 \text{ cm}$$

$$\Delta y = \frac{\Sigma r S U_{(P_y=1)}}{P_y} = 0,013 \text{ cm}.$$

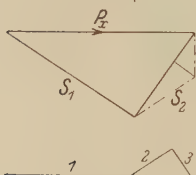


Abb. 174.

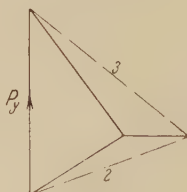


Abb. 175.

17. Aufgabe.

(Diplom-Vorprüfung W.-S. 1923/24.)

Eine gekröpfte Welle $ABCDEF$ von kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser des Kreises $d = 8 \text{ cm}$) und den Abmessungen $l = 25 \text{ cm}$, $b = 50 \text{ cm}$, $h = 60 \text{ cm}$ ist am rechten Ende F fest eingespannt, während an dem freien linken Ende A ein verdrehendes Moment $M = 30000 \text{ cm kg}$ wirkt, dessen Ebene in die Ebene des linken Querschnittes fällt. (Siehe den Seitenriß.)

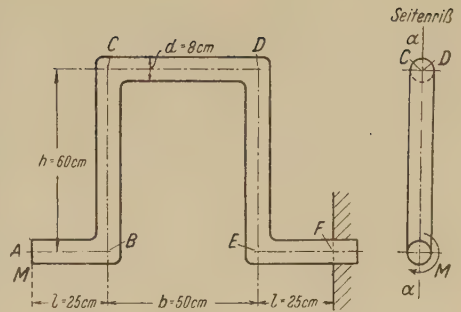


Abb. 176.

1. Man soll für die einzelnen Abschnitte der Welle die maximalen Normalspannungen und Schubspannungen berechnen.
2. Um welchen Winkel verdreht sich das freie Ende A der Welle infolge der Belastung?
3. Um wieviel treten dabei die Punkte C und D der Mittellinie aus der ursprünglichen Ebene der Mittellinie $ABCDEF$, die sich im Seitenriß durch die Gerade $\alpha-\alpha$ darstellt, heraus?

$$E = 2000000 \text{ at.}$$

$$G = 770000 \text{ at.}$$

Lösung:

	σ	τ
1. AB, CD, EF	0	298 at
BC, DE	596 at	0

$$2. \Delta \varphi = 0,0186 = 1^{\circ}4'.$$

$$3. f_{CD} = 0,279 \text{ cm.}$$

18. Aufgabe.

(Diplom-Vorprüfung S.-S. 1927.)

Eine Kurbelwelle $ABCDEFG$ von kreisförmigem Querschnitt ist bei A fest eingespannt und bei D durch eine senkrecht zur Kurbel Ebene wirkende Kraft $P = 1000 \text{ kg}$ belastet.

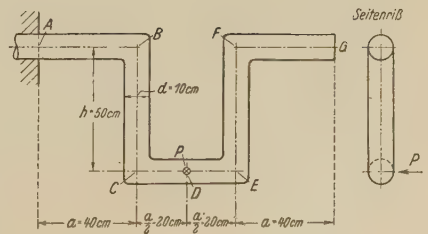


Abb. 177.

1. Fall: Das rechte Ende G soll zunächst vollkommen frei sein. In diesem Fall ist die Verteilung der durch die Belastung hervorgerufenen Biegungs- und Torsionsmomente für alle 5 Äste der gekrümmten Welle anzugeben. Ferner ist die Verschiebung des Angriffspunktes der Last P in Richtung der Last zu ermitteln.

2. Fall: Das rechte Ende G soll ebenso wie das linke vollkommen eingespannt sein. Wie groß und welcher Art sind die Einspannmomente bei A und G , die durch dieselbe Belastung wie im ersten Fall hervorgerufen werden?

Der Elastizitätsmodul beträgt 2000000 at , der Schubelastizitätsmodul 770000 at .

Lösung:

I. Fall:

Verteilung der Biegemomente
s. Abb. 178.

Verteilung der Torsionsmomente
s. Abb. 179.

$$f_D = 0,275 \text{ cm.}$$

II. Fall:

Einspannmoment $M_b = 175,5 \text{ mkg}$,
» $M_t = 250 \text{ mkg}$ statisch
bestimmt wegen Symmetrie.

19. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung S.-S. 1925.)

Ein langer prismatischer Kessel von quadratischem Querschnitt (s. Abb. 180) steht unter einem inneren Überdruck von $p = 3 \text{ at}$. Die Abmessungen des Querschnittes sind $2a = 60 \text{ cm}$ und die Wandstärke $h = 3 \text{ cm}$.

1. Man berechne an der Stelle A die gleichmäßig über die Dicke der Kesselwandung verteilte Zugspannung für einen Schnitt senkrecht zur Achse des Kessels und für einen Schnitt durch die Achse des Kessels (Achsenschnitt). Dabei sei vorausgesetzt, daß die Stelle A weit von

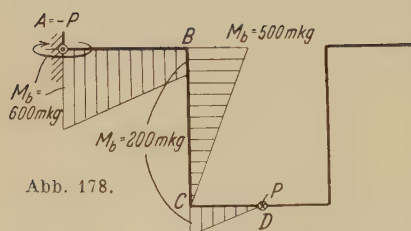


Abb. 178.

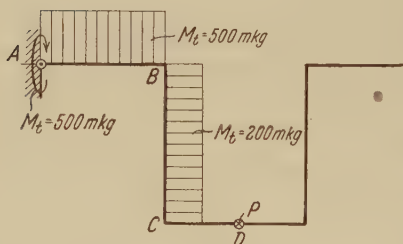


Abb. 179.

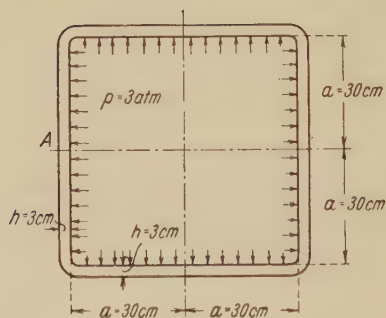


Abb. 180.

den beiden Kesselböden entfernt ist und ferner, daß die im Querschnitt des Kessels übertragenen Zugspannungen gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt sind.

2. Man bestimme das Biegemoment, das an der Stelle A im Achsenschnitt übertragen wird. Die Stelle und die Größe des größten auftretenden Biegemomentes ist zu ermitteln und die zugehörige Biegungsspannung zu berechnen.
3. Um wieviel vergrößert sich der Durchmesser $2a$ infolge des Innendruckes? Der Elastizitätsmodul E des Materials betrage 2000000 at.

Die Wandstärke h ist bei allen drei Fragen als klein gegenüber den übrigen Abmessungen des Kessels anzunehmen.

Lösung:

1. $\sigma_t = 15$ at
 $\sigma_t = 30$ at.
2. $M_A = -450$ mkg
 $\begin{cases} M_{\max} = +900 \text{ mkg in den Ecken} \\ \sigma_{\max} = 600 \text{ at.} \end{cases}$
3. $\Delta 2a = 0,0234$ cm.

20. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung W.-S. 1927/28.)

Ein rechteckiger Rahmen von den Seitenlängen $2a = 120$ cm und $2b = 80$ cm und quadratischem Querschnitt von der Seitenlänge $h = 7$ cm besitzt symmetrisch angeordnete Gelenke bei A und E und ist durch die Lasten $P = 2400$ kg auf Biegung beansprucht. Es sind die beiden Fälle zu unterscheiden, daß zwischen den Gelenken A und E eine Zugstange angeordnet ist oder nicht.

I. Fall: Ohne Zugstange.

Wie groß und wie gerichtet sind die Gelenkdrücke und wie groß ist das in den Querschnitten C und G übertragene Biegemoment?

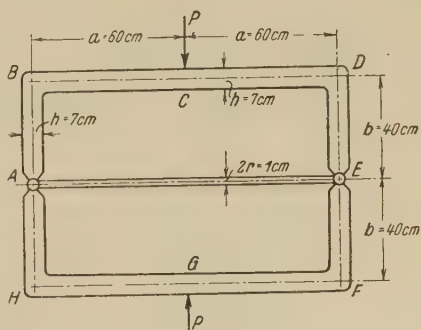


Abb. 181.

II. Fall: Mit Zugstange.

Die Zugstange habe kreisförmigen Querschnitt vom Radius $r = 0,5$ cm.

Wie groß ist die Zugkraft, die bei der angenommenen Belastung des Rahmens von der Stange AE aufgenommen wird?

Wie groß ist jetzt das in den Querschnitten C und G übertragene Biegemoment?

Der Elastizitätsmodul aller Teile betrage $E = 2100000$ at. Im Rahmen dürfen die Normalkräfte und Querkräfte vernachlässigt werden.

Lösung:

I. Fall: $A = E = 1200$ kg senkrecht gerichtet

$$M_C = M_G = 720 \text{ mkg.}$$

II. Fall: Zugkraft $S = 585$ kg

$$M_C = M_G = 486 \text{ mkg.}$$

21. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung S.-S. 1928.)

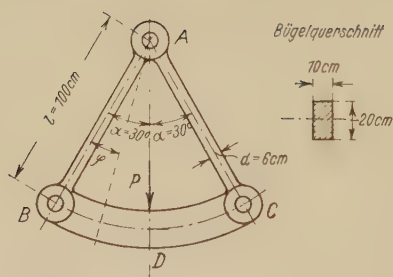


Abb. 182.

Ein Lastbügel besteht aus zwei in A gelenkig miteinander verbundenen Stäben AB und AC von $l = 100$ cm Länge und kreisförmigem Querschnitt von $d = 6$ cm Durchmesser, an die in B und C gelenkig ein Bügel von rechteckigem Querschnitt angeschlossen ist. Die Mittellinie des Bügels stellt einen Kreisbogen vom Öffnungswinkel $2\alpha = 60^\circ$ dar. Die Last $P = 10$ t greife im Symmetriequerschnitt D an.

Es sind folgende Fragen zu beantworten:

1. Wie groß und wie gerichtet sind die in den Gelenken B und C infolge der Last P übertragenen Gelenkdrücke? Sie sollen mit B bzw. C bezeichnet werden.
2. Wie groß ist für irgendeinen Bügelquerschnitt φ (s. Abb. 182) das Biegemoment, das mit M_φ bezeichnet werden soll? Insbesondere soll

das maximale Biegemoment $M_{\max}$ und die zugehörige maximale Biegungsspannung $\sigma_{\max}$ im Bügel berechnet werden.

3. Um wieviel vergrößert sich der Abstand AD infolge der Last? Diese Vergrößerung soll mit f bezeichnet werden. Der Elastizitätsmodul des Materials der Stäbe und des Bügels betrage $E = 2000000$ at. Der Bügel soll als schwach gekrümmter Stab angesehen werden, in dem man ferner die Querkraft und Normalkraft gegenüber dem Biegemoment vernachlässigen darf.
4. Es ist in aller Kürze in Stichworten (ohne Formeln) der Gedankengang für die Berechnung der Verkürzung der horizontalen Entfernung der beiden Gelenkpunkte B und C infolge der Last P anzugeben.

Lösung:

1. $B = C = 5,77$ t in Richtung der Stäbe AB und AC .

$$2. M_{\varphi} = \frac{P}{\sqrt{3}} l \sin \varphi$$

$$M_{\max} = 2,89 \text{ mt in } D$$

$$\sigma_{\max} = 433 \text{ at.}$$

$$3. f = 0,0348 \text{ cm.}$$

$$4. \text{ Verkürzung} = \frac{\partial A}{\partial B_x}.$$

22. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung W.-S. 1928/29.)

Nebenstehende Abbildung zeigt in Aufsicht und Grundriß einen Stabverband BCD von überall rechteckigem Querschnitt, der in den Punkten B , C und D gelagert ist. Die Abmessungen sind aus der Abbildung zu entnehmen. Es sind zwei verschiedene Arten der Lagerung und der Belastung zu unterscheiden:

1. Fall: Der Stabverband liegt bei B , C und D frei (ohne Einspannung) auf

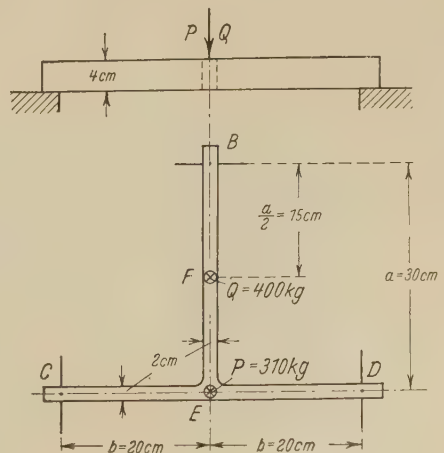


Abb. 183.

und ist durch die einzige, in F angreifende Last $Q = 400 \text{ kg}$ auf Biegung beansprucht. Dafür sind

- a) die Auflagerkräfte bei B , C und D
- b) die Verteilung der Biegemomente längs BE und CD sowie
- c) die maximale Biegunsspannung zu ermitteln.

2. Fall: Der Stabverband sei beim Auflager B fest eingespannt, während er in C und D nach wie vor frei aufliegt. Als einzige Last soll die Kraft $P = 310 \text{ kg}$ im Punkte E , der Mitte des Stabes CD , den Stabverband auf Biegung beanspruchen. Für diesen Fall sind

- d) die Auflagerkräfte B , C und D sowie das Einspannmoment M_0 im Auflager B zu ermitteln.

Der Elastizitätsmodul ist konstant; ebenso ist das Trägheitsmoment für alle Querschnitte dasselbe.

Lösung:

I. Fall:

- a) $B = 200 \text{ kg}$; $C = D = 100 \text{ kg}$.
- b) s. Abb. 184.
- c) $\sigma_{\max} = 562,5 \text{ at}$.

II. Fall:

- d) $B = 40 \text{ kg}$; $C = D = 135 \text{ kg}$;
 $M_0 = 12 \text{ mkg}$.

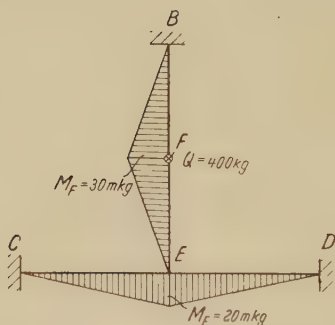


Abb. 184.

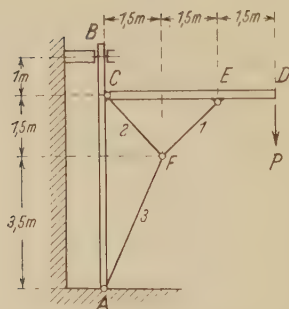


Abb. 185.

23. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung S.-S. 1929.)

Eine Kransäule AB ist am Boden in A gelenkig gelagert und bei B in einem vertikalen Gleitlager reibungsfrei geführt. Ein horizontaler Ausleger ist in C angelenkt und trägt in D eine Last $P = 5 \text{ t}$. Zur Abstützung des Auslegers dienen die Stäbe 1, 2 und 3, die mit Kransäule und Ausleger sowie miteinander gelenkig verbunden sind.

- 1. Wie groß und wie gerichtet sind die Auflagerkräfte in A und B ?

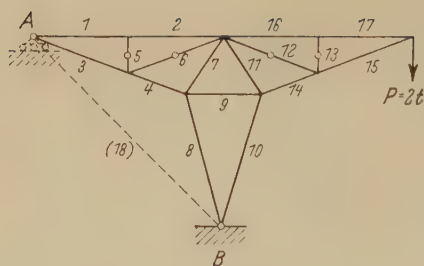


Abb. 190.

bringen wir statt der gelenkigen Lagerung ein Rollenlager an. Dadurch wird das Fachwerk einfach statisch unbestimmt. Wir zeichnen den »T«-Plan für das statisch bestimmte Fachwerk ohne Stab (18) (Abb. 192); dann zeichnen wir den »u«-Plan mit Weglassen von P und Anbringen einer Zugkraft von 1 t in Richtung des Stabes (18) (s. Abb. 191 u. 193).

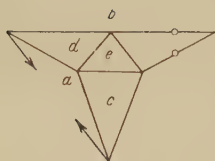


Abb. 191.

Nr.	r cm/kg	T t	u	$r T u$ cm	$r u^2$ cm/kg	$u X$	$S = T$ $+ u X$
1	$1 \cdot 10^{-5}$	+ 5,20	+ 1,14	$4,42 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	- 2,28	+ 2,92
2	»	+ 5,20	+ 1,14	$4,42 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	- 2,28	+ 2,92
3	»	- 5,65	- 1,98	$11,20 \cdot 10^{-5}$	$3,82 \cdot 10^{-5}$	+ 3,98	- 1,62
4	»	- 5,65	- 1,98	$11,2 \cdot 10^{-5}$	$3,82 \cdot 10^{-5}$	+ 3,98	- 1,62
5	»	0	0	0	0	0	0
6	»	0	0	0	0	0	0
7	»	0	- 1,04	0	$1,08 \cdot 10^{-5}$	+ 2,08	+ 2,08
8	$2 \cdot 10^{-5}$	- 2,10	- 1,62	$6,8 \cdot 10^{-5}$	$5,25 \cdot 10^{-5}$	+ 3,19	+ 1,19
9	$1 \cdot 10^{-5}$	- 4,65	- 0,84	$3,77 \cdot 10^{-5}$	$0,705 \cdot 10^{-5}$	+ 1,65	- 2,95
10	$2 \cdot 10^{-5}$	- 2,10	+ 0,90	$- 3,78 \cdot 10^{-5}$	$1,62 \cdot 10^{-5}$	- 1,82	- 3,92
11	$1 \cdot 10^{-5}$	0	+ 1,02	0	$1,04 \cdot 10^{-5}$	- 2,08	- 2,08
12	»	0	0	0	0	0	0
13	»	0	0	0	0	0	0
14	»	- 5,65	0	0	0	0	- 5,65
15	»	- 5,65	0	0	0	0	- 5,65
16	»	+ 5,20	0	0	0	0	+ 5,2
17	»	+ 5,20	0	0	0	0	+ 5,2
				$40,64 \cdot 10^{-5}$	$20,04 \cdot 10^{-5}$		

$$X = \frac{\sum r T u}{\sum r u^2} = \frac{40,64}{20,04} = - 2,02 \text{ t.}$$

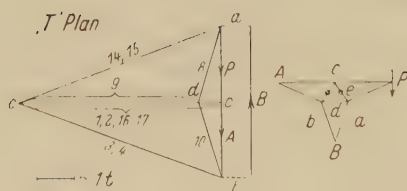


Abb. 192.

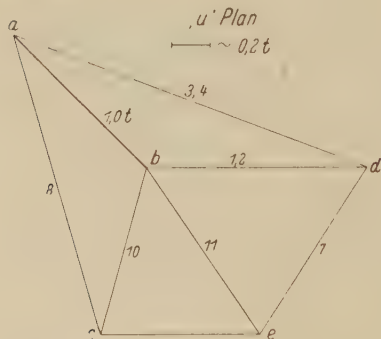


Abb. 193.

2. Aufgabe.

Der drehbare Ausleger 7, 8, 9 eines Wanddrehkranes ist durch die Stäbe 1 bis 6 gegen die Wand abgestützt. Sämtliche Knotenpunkte sind als Gelenke zu behandeln. Der Ausleger ist von $\alpha = 90^\circ$ bis $\alpha = -90^\circ$ drehbar.

Die Stabkonstanten der Stäbe 1 bis 6 seien gleich groß.

Gesucht:

Für jeden der Stäbe 1 bis 6 ist anzugeben

1. bei welchem Ausschlag α die Stabkraft S_i am größten wird,
2. wie groß diese maximale Stabkraft S_i ist.

Bem.: Bei der Untersuchung des Knotenpunktes I ist es vorteilhaft, mit den Komponenten der Stabkraft 8 in der x -, y - und z -Richtung zu arbeiten. Als erster Teil der Lösung sind nacheinander zu bestimmen die Stabkräfte 1 bis 4 für $X = 1$ t, dann für $Y = 1$ t und dann für $Z = 1$ t.

Lösung: Die Stäbe 5 und 6 sind am stärksten beansprucht, wenn Stab 9 in ihre Richtung fällt.

Die Stäbe 1 bis 4 bilden ein statisch unbestimmtes System.

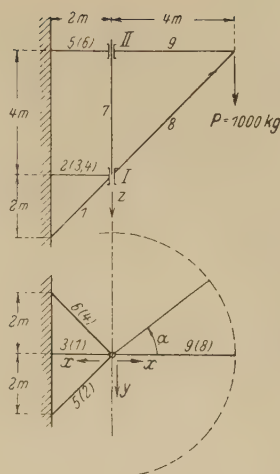


Abb. 194

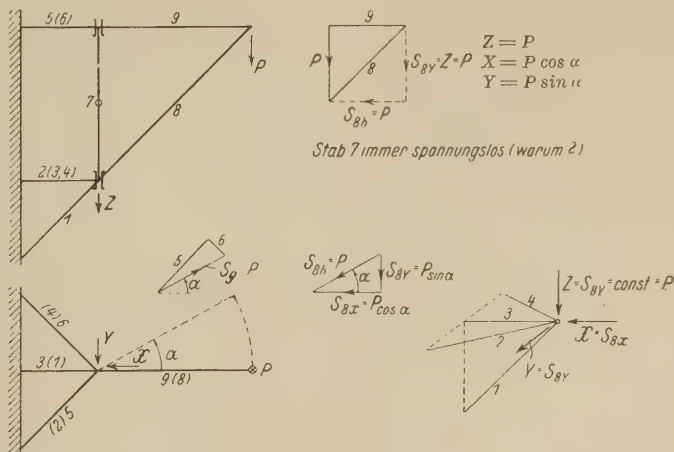


Abb. 195

Wir entfernen im folgenden immer Stab 2.

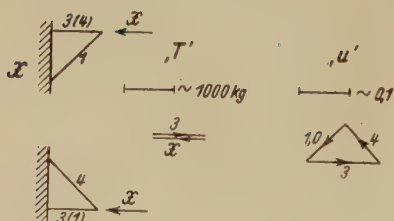


Abb. 196.

	T_{kg}	u	$u T_{kg}$	u^2	$u X_{kg}$	S_x
1	0	0	0	0	0	0
2	—	1,0	0	1	—350	—0,35
3	—1000	—1,41	1410	2	500	—0,50
4	0	1,0	0	1	—350	—0,35
			1410	4		

$$X = -\frac{1410}{4} = -350 \text{ kg.}$$

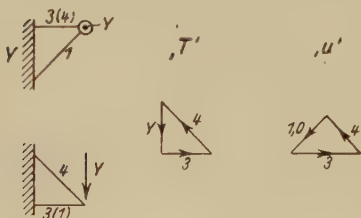


Abb. 197.

	T_{kg}	u	$u T_{kg}$	u^2	$u X_{kg}$	S_y
1	0	0	0	0	0	0
2	—	1,0	0	1	—700	—0,7
3	—1000	—1,41	1410	2	+1000	0
4	1410	1,0	1410	1	—700	0,7
			2820	4		

$$X = -\frac{2820}{4,0} = -700 \text{ kg.}$$

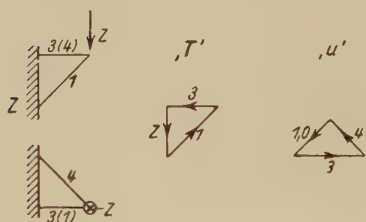


Abb. 198.

	T_{kg}	u	$u T_{kg}$	u^2	$u X_{kg}$	S_z
1	—1410	0	0	0	0	—1,41
2	—	1,0	0	1	350	0,35
3	1000	—1,41	—1410	2	—500	0,50
4	0	1,0	0	1	350	0,35
			—1410	4		

$$X = +\frac{1410}{4} = +350 \text{ kg.}$$

$$S_1 = X \cdot S_{1x} + Y \cdot S_{1y} + Z \cdot S_{1z} = -1,41 P$$

$$\begin{aligned} S_2 &= X \cdot S_{2x} + Y \cdot S_{2y} + Z \cdot S_{2z} = \\ &= P(-0,35 \cos \alpha - 0,70 \sin \alpha + 0,35) = \\ &= 0,35 P (1 - \cos \alpha - 2 \sin \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= X \cdot S_{3x} + Y \cdot S_{3y} + Z \cdot S_{3z} = \\ &= P(-0,5 \cos \alpha + 0,5) = \\ &= 0,5 P (1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 &= X \cdot S_{4x} + Y \cdot S_{4y} + Z \cdot S_{4z} = \\ &= P(-0,35 \cos \alpha + 0,70 \sin \alpha + 0,35) = \\ &= 0,35 P (1 - \cos \alpha + 2 \sin \alpha) \end{aligned}$$

$$S_5 = P \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

$$S_6 = P \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

$$S_7 = 0$$

$$S_8 = -1410 \text{ kg}$$

$$S_9 = +1000 \text{ kg.}$$

Extremwerte:

$$S_{1\text{konstant}} = -1,41 P$$

S_2 hat ein Maximum der Zugkraft von

$$S_2 = +1,05 P \text{ bei } \alpha = -90^\circ$$

der Druckkraft von

$$S_2 = -0,47 P \text{ bei } \alpha = 63^\circ 30'$$

(s. Abb. 199)

$$S_{3\text{max}} = +0,5 P \text{ bei } \alpha = \pm 90^\circ$$

$$S_{4\text{max}} = 1,05 P \text{ bei } \alpha = +90^\circ$$

$$S_{4\text{min}} = -0,47 P \text{ bei } \alpha = -63^\circ 30'$$

$$S_{5\text{max}} = +P \text{ bei } \alpha = 45^\circ$$

$$S_{6\text{max}} = +P \text{ bei } \alpha = -45^\circ$$

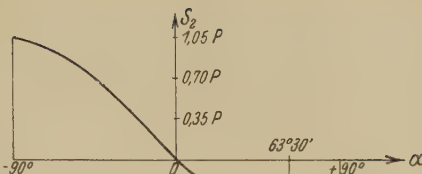


Abb. 199

3. Aufgabe.

Das in Grund- und Aufriß gezeichnete räumliche Fachwerk ist in den Punkten A, B, C und D gelenkig gelagert. Sämtliche Stäbe haben den gleichen Querschnitt und gleichen Elastizitätsmodul.

Gesucht sind für eine vertikale Last $P = 2 \text{ t}$ sämtliche Stabkräfte.

Lösung: Wir entfernen Stab 4, um das Fachwerk statisch bestimmt zu machen. Dann werden auch die Stäbe 1, 2, 5 sowie Stab 7 spannungslos (da Stäbe 3 und 6 sowie P in einer Ebene liegen.)

T —Plan s. Abb. 201.

u —Plan s. Abb. 202.

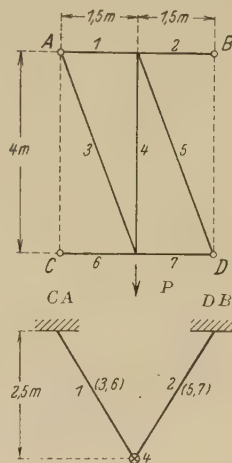


Abb. 200

Stab	$T_{(t)}$	$l_{(m)}$	u	$l \cdot T \cdot u$	$l u^2$	$X \cdot u$	S
1	0	2,92	0	0	0	0	0
2	0	2,92	0,725	0	1,53	0,593	0,593
3	2,45	4,95	-1,225	-14,85	7,4	-1,0	1,45
4	0	4,0	1,0	0	4,0	0,816	0,816
5	0	4,95	-1,225	0	7,4	-1,0	-1,0
6	-1,45	2,92	0,725	-3,05	1,53	0,593	-0,857
7	0	2,92	0	0	0	0	0
				$\Sigma l T u =$ -17,9	$\Sigma l u^2 =$ 21,86		

$$X = -\frac{\Sigma l T u}{\Sigma l u^2} = +0,816$$

$$S = T + X \cdot u$$

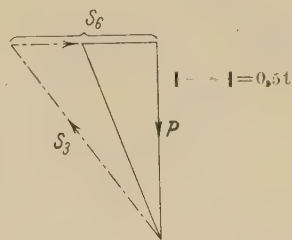


Abb. 201.

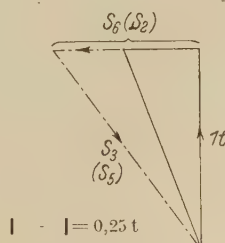


Abb. 202.

4. Aufgabe.

Für das gezeichnete Fachwerk sind zu ermitteln die Stabkräfte nach Größe und Vorzeichen.

Gegeben:

Querschnitt der Stäbe 2 bis 5 und 7 bis 9: $F_1 = 5 \text{ cm}^2$.

Querschnitt der Stäbe 1, 6, 10 und 11: $F_2 = 10 \text{ cm}^2$.

Elastizitätsmodul $E = 2,10^6 \text{ at}$.

Lösung: (s. Abb. 204)

Die Stäbe 2 und 5 sind spannungslos.

$$A = 3,85 \text{ t}$$

$$B = 6,15 \text{ t}$$

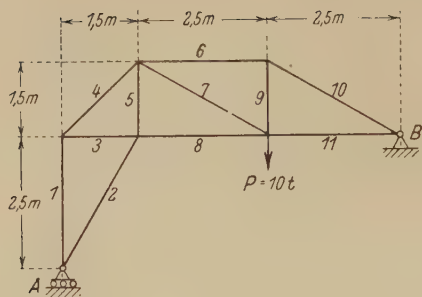


Abb. 203.

Stab:	1	2	3	4	5	6
Spannung (t):	— 3,85	0	3,85	— 5,44	0	— 10,2

Stab:	7	8	9	10	11
Spannung (t):	7,4	3,85	6,15	— 12,0	10,2

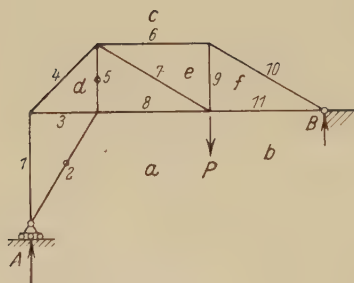
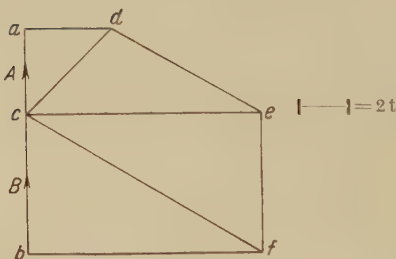


Abb. 204.



§ 7. Torsion und Knicken von Stäben.

Mit der elementaren Theorie der Torsion lassen sich nur der kreis- und kreisringförmige Querschnitt behandeln, da sich nur diese bei der Torsion nicht verformen.

Die Torsionsschubspannungen τ wachsen beim kreisförmigen Querschnitt von der Mitte aus, wo sie den Wert Null haben, geradlinig bis zum Rande an, wo sie den Wert $\tau' = \frac{2 M_t}{\pi a^3}$ annehmen, wenn mit a der Radius des Kreises bezeichnet wird.

Für den kreisringförmigen Querschnitt mit a als äußerem und b als innerem Radius ist die maximale Schubspannung am äußeren Rande

$$\tau' = \frac{2 M_t \cdot a}{\pi (a^4 - b^4)}.$$

Der Verdrehungswinkel ϑ ist beim Vollkreis:

$$\vartheta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J_p} \text{ mit } J_p = \frac{\pi a^4}{2}$$

und beim Kreisring:

$$\vartheta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J_p} \text{ mit } J_p = \frac{\pi (a^4 - b^4)}{2}.$$

Das Berechnen auf Knicken gerader Stäbe muß bei schlanken Stäben nach Euler und bei weniger schlanken nach Tetmajer erfolgen. Das Schlankheitsverhältnis ist

$$x = \frac{l}{i} \quad (l = \text{Stablänge, } i = \text{kleinster Trägheitsradius des Querschnittes}).$$

Bei Flußeisen ist

mit $x > 105$ die Eulersche Knicklast,

mit $x < 105$ die Tetmajersche Knicklast maßgebend.

Die Eulersche Knicklast für beiderseits gelenkig gelagerte Stäbe lautet:

$$P_k = \pi^2 \frac{E J}{l^2}.$$

1. Aufgabe.

Eine Welle von $l = 2,5$ m und kreisförmigem Querschnitt ($D = 10$ cm) ist am Ende A eingespannt und trägt am freien Ende B einen horizontalen Arm BC von $l' = 1$ m Länge. In C wird eine vertikale Last $P = 500$ kg aufgebracht.

Gesucht ist die größte Anstrengung σ_{red} der Welle sowie die (nahezu vertikale) Verschiebung des Lastangriffspunktes C , wobei der Arm BC als starr anzusehen ist.

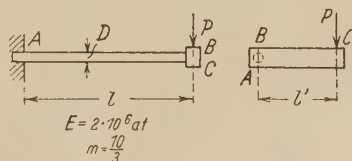


Abb. 205.

Lösung:

$$\sigma = \frac{(M_b)_{\max}}{W} = \frac{P \cdot l}{98,2} = 1275 \text{ at.}$$

$$\tau = \frac{M_t \cdot \frac{D}{2}}{J_p} = \frac{P \cdot l' \cdot 5}{196,34} = 255 \text{ at.}$$

$$\sigma_{\text{red}} = 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} = 1340 \text{ at.}$$

Die Verschiebung des Lastangriffspunktes

$$f_c = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{P l^3}{3 E J} + \frac{P l'^2 \cdot l}{G J_p} = 2,66 + 1,65 = 4,31 \text{ cm.}$$

2. Aufgabe.

Die in A und B gelagerte Vorgelegewelle überträgt die Leistung $N = 30 \text{ PS}$ von der Welle 1 auf die Welle 2. Drehzahl der Vorgelegewelle $n = 180 \text{ Uml/min}$. Die Zahnradkräfte P_1 bzw. P_2 seien tangential an den Teilkreis, also horizontal gerichtet. Die Welle hat Kreisquerschnitt mit dem Durchmesser $d = 6 \text{ cm}$. Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^6 \text{ at.}$

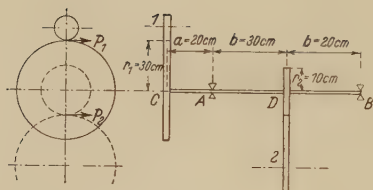


Abb. 206.

Gesucht:

1. In der Welle übertragenes Drehmoment M_d .
2. Verlauf des Biegemomentes M_b längs der Welle.
3. Maximale Torsionsspannung τ .
4. Ort und Größe der maximalen Biegungsspannung.
5. Mohrscher Spannungskreis für die Stelle maximaler Beanspruchung. Hieraus maximale Schubspannung $\tau_{\max}$.
6. Durchbiegung f der Welle in Punkt D .

Lösung:

$$1. \quad M \cdot \omega = N \quad \omega = \frac{n\pi}{30} = 6\pi$$

$$M_d = M = \frac{N}{\omega} = \frac{30 \cdot 75}{6\pi} = 119,3 \text{ mkg.}$$

$$2. \quad P_1 = \frac{M}{r_1} = 397 \text{ kg}$$

$$(M_b)_A = a \cdot P_1 = a \cdot \frac{M}{r_1} = \frac{2}{3} M = 79,5 \text{ mkg.}$$

$$P_2 = \frac{M}{r_2} = 1193 \text{ kg}$$

$$A + B = 1590 \text{ kg}$$

$$A \cdot 0,6 = P_1 (2b + a) + P_2 \cdot b = \\ = 397 \cdot 0,8 + 1193 \cdot 0,3$$

$$A = \frac{676}{0,6} = 1125 \text{ kg}$$

$$B = 1590 - 1125 = 465 \text{ kg}$$

$$(M_b)_D = P_1 \cdot 0,5 - A \cdot 0,3 = \\ 338 - 199 = 139 \text{ mkg.}$$

$$3. \quad \tau = \frac{M_d}{J_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{11900 \cdot 3}{2 \cdot 63,62} = 282 \text{ at}$$

$$4. \quad \sigma = \frac{(M_b)_D}{J_d} = \frac{13900 \cdot 3}{63,32} = 656 \text{ at.}$$

5. Mohrscher Spannungskreis
s. Abb. 207b.

6. Durch Superposition:

$$f_D = f_1 - f_2.$$

$$f_1 = \frac{P_2 l^3}{48 EJ} = 0,0424 \text{ cm}$$

$$f_2 = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l^2 a}{6} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) = 0,014 \text{ cm}$$

$$f_D = f_1 - f_2 = 0,028 \text{ cm.}$$

Verteilung der Biegemomente:

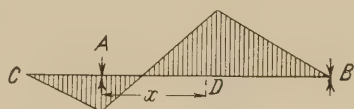


Abb. 207a.

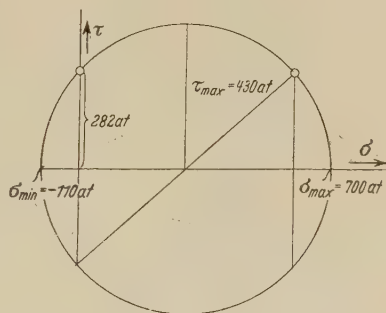


Abb. 207b.

3. Aufgabe.

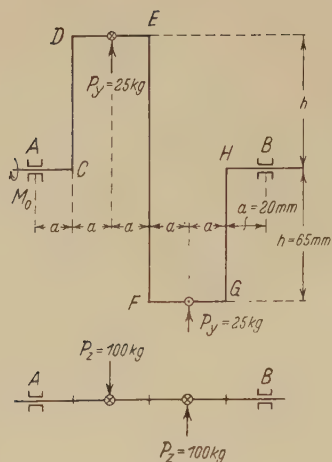


Abb. 208.

Eine zweifach gekröpft und zweifach gelagerte Kurbelwelle wird durch die angegebenen Komponenten der Schubstan- genkräfte belastet. Das Drehmoment wird bei A weitergeleitet. Es sei überall kreisförmiger Querschnitt vom Durchmesser $d = 30$ mm angenommen. Die Auflagerung ist als gelenkig anzusehen.

Gesucht sind:

1. Horizontal- und Vertikalkomponenten der Auflagerkräfte.
2. Verlauf des Torsionsmoments M_t und des Biegemoments M_b .
3. Ort und Größe der maximalen Biegun- gsspannung $\sigma_{b\max}$.
4. Ort und Größe der maximalen Tor- sionsspannung $\tau_{\max}$.

Lösung.

$$1. \Sigma M = 0 \quad P_z \cdot 2a = A_z \cdot 6a$$

$$A_z = B_z = \frac{P_z}{3} = 33,3 \text{ kg}$$

$$\Sigma Y = 0 \quad A_y = B_y = P_y = 25 \text{ kg}$$

$$\Sigma M = 0 \quad M_0 = P_z \cdot 2h = 100 \cdot 13 = 1300 \text{ kgcm.}$$

2. Torsionsmomente (s. Abb. 209)

$$HB: M_t = 0$$

$$GH: M_t = B_z \cdot a = 33,3 \cdot 2 = 66,6 \text{ kgcm}$$

$$FG: M_t = B_z \cdot h = 33,3 \cdot 6,5 = 216 \text{ kgcm}$$

$$EF: M_t = P_z \cdot a - B_z \cdot 3a = 0$$

$$DE: M_t = P_z \cdot 2h - B_z \cdot h = P_z \left(2h - \frac{h}{3} \right) - P_z \cdot \frac{5}{3} h = 100 \cdot \frac{5}{3} \cdot 6,5 = 1083 \text{ kgcm}$$

$$CD: M_t = A_z \cdot a = 33,3 \cdot 2 = 66,6 \text{ kgcm}$$

$$AC: M_t = M_0 = 1300 \text{ kgcm.}$$

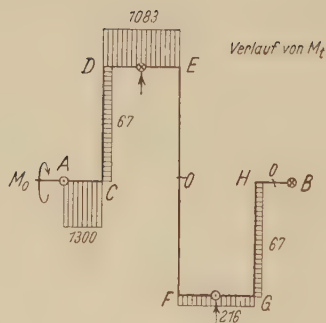


Abb. 209.

Bieugungsmomente M_{by} (s. Abb. 210).

$$\begin{aligned}
 \text{Ast } BH & \left\{ \begin{aligned} H: M_{by} &= B_z \cdot a = 33,3 \cdot 2 = \\ &= 66,6 \text{ kgcm} \end{aligned} \right. \\
 \text{Ast } HG & \left\{ \begin{aligned} H: M_{by} &= 0 \\ G: M_{by} &= B_z \cdot h = 33,3 \cdot 6,5 = \\ &= 216 \text{ kgcm} \end{aligned} \right. \\
 \text{Ast } GF & \left\{ \begin{aligned} G: M_{by} &= B_z \cdot a = 66,6 \text{ kgcm} \\ P: M_{by} &= B_z \cdot 2a = 133,3 \text{ kgcm} \end{aligned} \right. \\
 \text{Ast } GF & \left\{ F: M_{by} = B_z \cdot 3a - P_z \cdot a = 0 \right. \\
 \text{Ast } EF & \left\{ F: M_{by} = B_z \cdot h = 216 \text{ kgcm} \right. \\
 \text{Ast } EF & \left\{ \begin{aligned} E: M_{by} &= P_z \cdot 2h - B_h \cdot h = \\ &= 1300 - 216 = 1084 \text{ kgcm} \end{aligned} \right. \\
 \text{Ast } DE & \left\{ \begin{aligned} E: M_{by} &= P_z \cdot a - B_z \cdot 3a = 0 \\ P: M_{by} &= P_z \cdot 2a - B_z \cdot 4a = \\ &= 400 - 267 = 133 \text{ kgcm} \end{aligned} \right. \\
 \text{Ast } DE & \left\{ D: M_{by} = A_z \cdot a = 33,3 \cdot 2 = \\ &= 66,6 \text{ kgcm} \right. \\
 \text{Ast } CD & \left\{ \begin{aligned} D: M_{by} &= M_0 - A_z \cdot h = 1300 - \\ &- 33,3 \cdot 6,5 = 1084 \text{ kgcm} \end{aligned} \right. \\
 \text{Ast } CD & \left\{ C: M_{by} = M_0 = 1300 \text{ kgcm} \right. \\
 \text{Ast } AC & \left\{ C: M_{by} = A_z \cdot a = 66,6 \text{ kgcm} \right.
 \end{aligned}$$

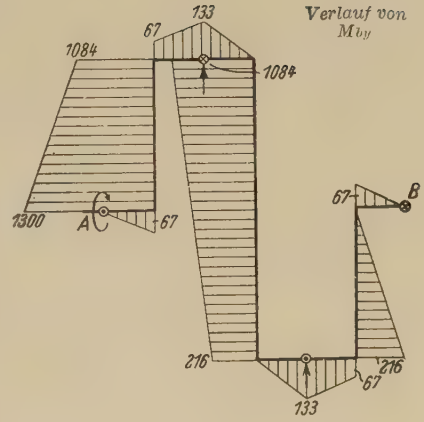


Abb. 210.

Bieugungsmomente M_{bz} (s. Abb. 211).

$$\begin{aligned}
 H: M_{bz} &= B_y \cdot a = 50 \text{ kgcm} \\
 G: M_{bz} &= B_y \cdot a = 50 \text{ kgcm} \\
 P: M_{bz} &= B_y \cdot 2a = 100 \text{ kgcm} \\
 F: M_{bz} &= B_y \cdot 3a - P_y \cdot a = \\ &= 100 \text{ kgcm} \\
 E: M_{bz} &= B_y \cdot 3a - P_y \cdot a = \\ &= 100 \text{ kgcm} \\
 P: M_{bz} &= B_y \cdot 4a = P_y \cdot 2a = \\ &= 100 \text{ kgcm} \\
 D: M_{bz} &= B_y \cdot 5a - P_y \cdot 3a - \\ &- P_y \cdot a = A_y \cdot a = 50 \text{ kgcm} \\
 C: M_{bz} &= A_y \cdot a = 50 \text{ kgcm}
 \end{aligned}$$

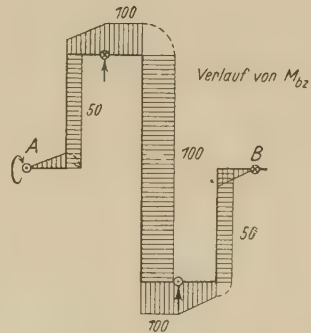


Abb. 211.

3. Maximales Bieugungsmoment in C:

$$M_{by} = M_0 = 1300 \text{ kgcm}$$

$$M_{bz} = P_y \cdot a = 50 \text{ kgcm}$$

$$\begin{aligned}
 M_{b \max} &= \sqrt{1300^2 + 50^2} = \\ &= \sqrt{169 \cdot 25 \cdot 100} = 1300 \text{ kgcm} \\ &\text{(in C gegen D).}
 \end{aligned}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = 3,976 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{J}{d/2} = 2,651 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{b \max} = \frac{1300}{2,651} = 490 \text{ at (in } C \text{ gegen } D).$$

$$4. \quad M_{t \max} = 1300 \text{ kgcm (von } A \text{ bis } C)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t \cdot d/2}{J_y} = \frac{1300 \cdot 1,5}{7,952} = 245 \text{ at.}$$

4. Aufgabe.

Man berechne Knicklast P_k und Knickspannung σ_k

- für ein Doppel-T-Eisen NP. 10 von der Länge $l = 4,0 \text{ m}$,
- für ein gleichschenkeliges Winkel-eisen NP. 5, Flanschdicke 7 mm , von der Länge $l = 0,90 \text{ m}$.

In beiden Fällen sei gelenkige Lagerung angenommen.

Material: Weicher Flußstahl.

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ at.}$$

Konstanten der Tetmajerformel:

$$\frac{P_k}{F} = ax^2 + bx + c.$$

$$a = 0.$$

$$b = -11,4.$$

$$c = 3100.$$

Lösung:

$$a) \quad J_y = 12,2 \text{ cm}^4$$

$$F = 10,6 \text{ cm}^2$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 1,073 \text{ cm}$$

$$x = \frac{l}{i} = 373, \text{ also Eulersche Formel}$$

$$P_k = EJ \cdot \frac{\pi^2}{l^2} = 1510 \text{ kg.}$$

$$b) \quad J_y = 6,02 \text{ cm}^4$$

$$F = 6,56 \text{ cm}^2$$

$$i = 0,956 \text{ cm}$$

$$x = 94,2, \text{ also Tetmajerformel}$$

$$\frac{P_k}{F} = -11,4 \cdot x + 3300 = 2028$$

$$P_k = 13300 \text{ kg.}$$

5. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung S.-S. 1924.)

Ein Balken $ABCD$ ist in A eingespannt, in D gelenkig gelagert und besitzt außerdem Gelenke in B und C . Er ist längs AC gleichmäßig belastet mit der Lastintensität $q = 3 \text{ kg/cm}$ und in der Mitte des vertikalen Astes CD greift die horizontale Last $P = 1000 \text{ kg}$ an. Die Abmessungen sind $a = 3 \text{ m}$, $b = 5 \text{ m}$, $h = 4 \text{ m}$. Der Balken hat überall quadratischen Querschnitt von der Kantenlänge $s = 10 \text{ cm}$.

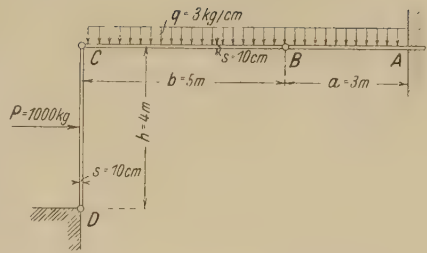


Abb. 212.

1. Man bestimme die drei Gelenkdrücke bei B , C und D nach Größe und Richtung, graphisch oder rechnerisch.
2. Man ermittle die Verteilung der Biegemomente für jeden der drei Äste AB , BC und CD und berechne die maximale Biegungsspannung, die überhaupt auftritt.
3. Denkt man sich unter sonst vollkommen gleichbleibenden Verhältnissen die Höhe h vergrößert, so daß der Gelenkpunkt D und damit auch der in der Mitte von CD gelegene Angriffspunkt der horizontalen

Kraft entsprechend tiefer zu liegen kommen, so soll der kritische Wert für h berechnet werden, bei dem Ausknicken des Stabes CD erfolgt. Insbesondere ist dabei die Frage zu erörtern, welchen Einfluß die Kraft P auf das Ausknicken des Stabes CD hat. Der Elastizitätsmodul des Materials betrage $E = 1\,000\,000 \text{ at}$.

Lösung:

1. $B_x = 500 \text{ kg}$
 $B_y = 750 \text{ kg}$
 $C_x = 500 \text{ kg}$
 $C_y = 750 \text{ kg}$
 $D_x = 500 \text{ kg}$
 $D_y = 750 \text{ kg}$
- $B \sim 900 \text{ kg}$
 $C \sim 900 \text{ kg}$
 $D \sim 900 \text{ kg}.$

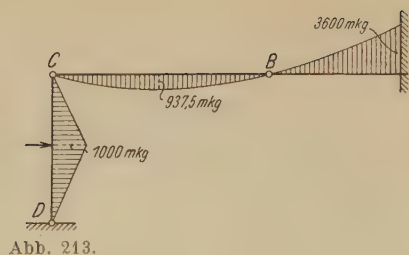


Abb. 213.

$$2. \text{ (s. Abb. 213) } M_{\max} = 3600 \text{ kg} \\ \sigma_{\max} = 2160 \text{ at.}$$

$$3. \quad h_{\max} = 33,1 \text{ m.}$$

Die Kraft P ist ohne Einfluß auf die Knicklänge.

§ 8. Stäbe auf nachgiebiger Unterlage; Achsensymmetrischer ebener Spannungszustand; Bachsche Näherungstheorie für Platten.

1. Aufgabe.

Ein Eisenträger ist auf die Länge a einbetoniert und trägt an dem um b vorkragenden Ende eine Einzellast P . Die Einsenkung y des Betons folgt dem Gesetz $p = k \cdot y$, wobei p = Druck pro Längeneinheit des einbetonierten Trägers.

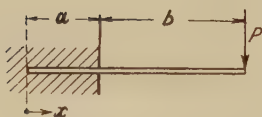


Abb. 214.

Zu bestimmen sind:

1. Differentialgleichung der elastischen Linie des eingespannten Teiles,
2. Allgemeine Lösung der Differentialgleichung,
3. Grenzbedingungen,
4. Bedingungsgleichungen für die Integrationskonstanten (ohne Auflösung),
5. Graphische Darstellung des ungefähren Verlaufs des Biegemomentes M , der Schubkraft V und des Druckes p .

Lösung:

$$1. \quad EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky.$$

2. Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x$$

$$\text{mit } \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}.$$

3. Grenzbedingungen:

$$\begin{aligned}
 x=0 \quad M=0 \quad y'' &= 0 \\
 x=0 \quad V=0 \quad y''' &= 0 \\
 x=a \quad M=-Pb \quad y'' &= \frac{P \cdot b}{EJ} \\
 x=a \quad V=P \quad y''' &= \frac{P}{EJ}
 \end{aligned}$$

4. Gleichungen für die Integrationskonstanten C_1 bis C_4 :

$$1. \quad 0 = 2C_2 - 2C_4; \quad C_2 - C_4 = 0.$$

$$2. \quad 0 = -2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 2C_4; \\ C_2 + C_3 + C_4 - C_1 = 0.$$

$$3. \quad -C_1 m_2 + C_2 m_1 + C_3 m_4 - C_4 m_3 = \\ = \frac{Pb}{2\alpha^2 EJ}.$$

$$4. \quad -C_1(m_1 + m_2) + C_2(m_1 - m_2) + \\ + C_3(m_3 - m_4) + C_4(m_3 + m_4) = \\ = \frac{P}{2\alpha^3 EJ}$$

mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= e^{\alpha a} \cos \alpha a; & m_2 &= e^{\alpha a} \sin \alpha a; \\
 m_3 &= e^{-\alpha a} \cos \alpha a; & m_4 &= e^{-\alpha a} \sin \alpha a.
 \end{aligned}$$

5. Ungefäher Verlauf des Biegemomentes M , der Schubkraft V und des Druckes p s. Abb. 215.

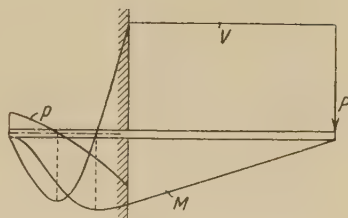


Abb. 215.

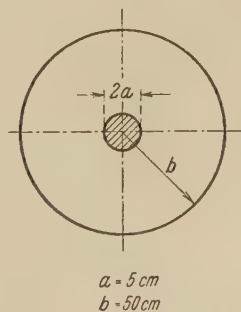
2. Aufgabe.

Eine Scheibe konstanter Dicke ist auf eine Vollwelle mit einem Schrumpfdruck $p = 300$ at aufgepreßt. Bei welcher Winkelgeschwindigkeit ω wird der Druck zwischen Welle und Scheibe Null, so daß Gleiten eintritt?

Spez. Gewicht des Materials $7,86 \text{ g/cm}^3$.

Poissonsche Konstante $m = \frac{10}{3}$.

Die Aufgabe kann gelöst werden durch Untersuchung der Formänderung von Scheibe und Welle. Dabei seien folgende Bezeichnungen eingeführt:



$a = 5 \text{ cm}$
 $b = 50 \text{ cm}$

Abb. 216.

ϱ_1 = Änderung des Außenradius der Welle nur infolge des Aufschrumpfens (ohne Wirkung der Drehgeschwindigkeit),

ϱ_2 = Änderung des Innenradius der Scheibe nur infolge des Aufschrumpfens (ohne Wirkung der Drehgeschwindigkeit),

ϱ_3 = Änderung des Innenradius der Scheibe nur infolge der Rotation.

Lösung:

I. $\omega = 0$.

Die Lösung der Differentialgleichung für die radiale Ausdehnung ϱ lautet:

$\varrho = Br + \frac{C}{r}$ mit B und C als Integrationskonstanten. Daraus folgt für die radiale und tangentielle Spannung

$$\sigma_r = \beta - \frac{\gamma}{r^2}$$

$$\sigma_t = \beta + \frac{\gamma}{r^2},$$

wobei

$$\beta = \frac{mE}{m-1} B; \quad \gamma = \frac{mE}{m+1} \cdot C.$$

Aus den Grenzbedingungen für die Vollwelle $r = a$: $\sigma_r = -p$ (Schrumpfdruck) und

$$r = 0: \sigma_r = \sigma_t$$

folgt:

$$\gamma = 0 \text{ bzw. } C = 0,$$

und

$$\beta = -p \text{ bzw. } B = -\frac{m-1}{m \cdot E} \cdot p.$$

Folglich ist

$$(\varrho_1)_{r=a} = -\frac{m-1}{m \cdot E} p a = -5,2 \cdot 10^{-4} \text{ cm.}$$

Das Schrumpfmaß ist einerseits

$$\varepsilon = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)_{r=a}}{a},$$

andererseits

$$\varepsilon = \frac{p}{E} \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2},$$

so daß

$$(\varrho_2 - \varrho_1)_{r=a} = \frac{p a}{E} \cdot \frac{2 b^2}{b^2 - a^2} \approx 2 \frac{p a}{E}$$

(da $b^2 \gg a^2$).

$$\varrho_2 - \varrho_1 \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm.}$$

II. $\omega \neq 0$, und zwar ist der Wert von ω gesucht, bei dem der Schrumpfdruck Null wird.

Lösung der Differentialgleichung für ϱ , mit Berücksichtigung der Rotation:

$$\varrho_3 = B r + \frac{C}{r} - \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \mu \omega^2 \cdot \frac{r^3}{8}.$$

Grenzbedingungen für die Scheibe:

$r = a$: $\sigma_r = 0$ (d. h. der Schrumpfdruck wird Null);

$r = b$: $\sigma_r = 0$.

Daraus findet man

$$B = \frac{m-1}{m^2 E} \cdot \frac{3m+1}{8} (a^2 + b^2) \cdot \mu \omega^2$$

$$C = \frac{m+1}{m^2 E} \cdot \frac{3m+1}{8} a^2 b^2 \mu \omega^2$$

und damit

$$\varrho_3 = \frac{\mu \omega^2}{8 E} \cdot \frac{3m+1}{m} \cdot 2 a b^2 = 4,12 \cdot 10^{-8} \cdot \omega^2.$$

Die Bedingung für ω lautet:

$$\varrho_2 - \varrho_1 = \varrho_3$$

oder

$$\frac{2 p a}{E} = \frac{\mu \omega^2}{8 E} \cdot \frac{3m+1}{m} \cdot 2 a b^2,$$

daraus:

$$\omega^2 = \frac{m}{3m+1} \cdot \frac{8 p}{\mu b^2} = 3,63 \cdot 10^4$$

$$\omega = 190,4 \frac{1}{\text{sec}}; \quad n = \omega \frac{30}{\pi} = 1820 \text{ U/min.}$$

3. Aufgabe.

Ein Haubitzzrohr besteht aus einem Seelenrohr S und einem warm darüber gezogenen Mantelrohr M . Das Schrumpfmaß ε ist so zu berechnen, daß bei einem

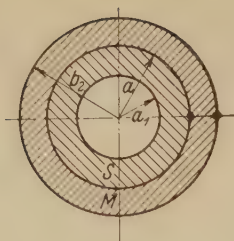


Abb. 217.

inneren Überdruck $p_1 = 2000$ at die Tangentialspannung σ_{ts} an der Innenseite des Seelenrohres gleich der Tangentialspannung σ_{tm} an der Innenseite des Mantelrohres wird.

Gegeben:

$$a_1 = 5,4 \text{ cm}$$

$$a = 9,5 \text{ »}$$

$$b_2 = 13,0 \text{ »}$$

$$E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ at.}$$

Gang der Lösung:

1. Spannungen vor dem Schuß ($p_1 = 0$) unter dem Einfluß des Druckes p_2 zwischen beiden Rohren infolge Aufschumpfens: Berechnung von σ_{tm2} und σ_{ts2} als Funktion von p_2 .
2. Spannungen während des Schusses ($p_1 = 2000$ at) ohne Berücksichtigung der unter 1. berechneten Vorspannungen, wobei das Rohr als aus einem Stück bestehend angesehen werden kann.
3. Spannungen während des Schusses unter Berücksichtigung der Vorspannungen: Berechnung von p_2 für $(\sigma_{ts})_{r=a_1} = (\sigma_{tr})_{r=a}$
4. Berechnung des Schrumpfmaßes ε und der Differenz der Rohrhalmesser $b_1 - a_2$ im spannungslosen Zustand vordem Aufziehen, wenn mit $2b_1$ bzw. $2a_2$ der Innendurchmesser des Mantelrohres bzw. der Außendurchmesser des Seelenrohres vor dem Aufschumpfen bezeichnet wird.
5. Graphische Darstellung des Verlaufs der Spannungen σ_t und σ_r längs eines Durchmessers
 - a) vor dem Schuß,
 - b) im Augenblick des größten Gasdruckes ($p_1 = 2000$ at).

Lösung:

$$1. \sigma_{tm2} = \frac{a^2}{b_2^2 - a^2} \frac{b_2^2 + r^2}{r^2} p_2$$

$$\sigma_{ts2} = - \frac{a^2}{a^2 - a_1^2} \frac{r^2 + a_1^2}{r^2} p_2.$$

$$2. \quad \sigma_r = -\frac{a_1^2}{b_2^2 - a_1^2} \frac{b_2^2 + r^2}{r^2} p_1$$

$$\sigma_t = \frac{a_1^2}{b_2^2 - a_1^2} \frac{b_2^2 + r^2}{r^2} p_1$$

$$r = a_1: \sigma_r = p_1 = 2000 \text{ at};$$

$$\sigma_t = \frac{b_2^2 + a_1^2}{b_2^2 - a_1^2} p_1 = 1,42 p_1 \\ = 2840 \text{ at}$$

$$r = a: \sigma_t = \frac{a_1^2}{a^2} \frac{b_2^2 + a^2}{b_2^2 - a_1^2} p_1 = \\ = 0,324 \frac{1,535}{0,827} p_1 = 0,601 p_2 \\ = 1200 \text{ at}$$

$$r = b_2: \sigma_t = 2 \frac{a_1^2}{b_2^2 - a_1^2} p_1 = \\ = 2 \frac{0,173}{0,827} p_1 = 0,419 p_1 \\ = 838 \text{ at.}$$

3. Für das Seelenrohr:

$$\sigma_{ts} = p_1 \frac{a_1^2}{b_2^2 - a_1^2} \frac{b_2^2 + r^2}{r^2} - \\ - \frac{a^2}{a^2 - a_1^2} \frac{r^2 + a_1^2}{r^2} p_2$$

für das Mantelrohr:

$$\sigma_{tm} = p_1 \frac{a_1^2}{b_2^2 - a_1^2} \frac{b_2^2 + r^2}{r^2} + \\ + \frac{a^2}{b_2^2 - a^2} \frac{b_2^2 + r^2}{r^2} p_2$$

$$(\sigma_{ts})_{r=a_1} = (\sigma_{tm})_{r=a}:$$

$$p_1 \left[\frac{b_2^2 + a_1^2}{b_2^2 - a_1^2} - \frac{a_1^2}{b_2^2 - a_1^2} \frac{b_2^2 + a^2}{a^2} \right] = \\ = p_2 \left[\frac{2 a_1^2}{a^2 - a_1^2} + \frac{b_2^2 + a^2}{b_2^2 - a^2} \right];$$

daraus:

$$p_2 = 263 \text{ at.}$$

4. Schrumpmaß:

$$\varepsilon = \frac{p_2}{E} \left[\frac{b_2^2 + a^2}{b_2^2 - a^2} + \frac{a^2 + a_1^2}{a^2 - a_1^2} \right] = \\ = 6,26 \cdot 10^{-4} \text{ cm.}$$

$$\varepsilon = \frac{b_1 - a_2}{a}; \quad b_1 - a_2 = a \varepsilon = 0,0059 \text{ cm.}$$

5. a) s. Abb. 218.

b) s. Abb. 219.

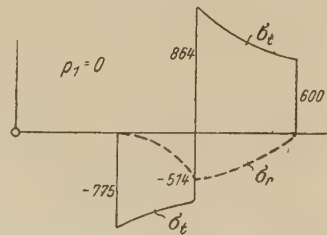


Abb. 218.

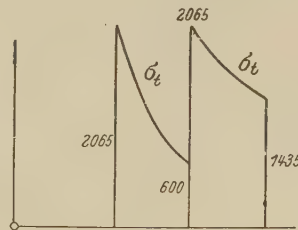


Abb. 219.

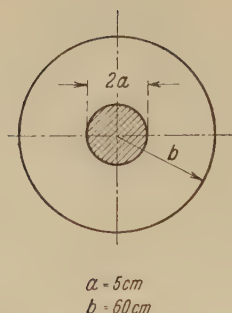


Abb. 220.

4. Aufgabe.

Eine Scheibe konstanter Dicke ist auf eine Vollwelle mit einem Schrumpfdruck $p = 400 \text{ at}$ aufgepreßt.

Bei welcher Winkelgeschwindigkeit ω wird der Druck zwischen Welle und Scheibe Null, so daß Gleiten eintritt?

Spez. Gewicht des Materials

$$s = 7,86 \text{ g/cm}^3; m = \frac{10}{3}.$$

Die Aufgabe kann gelöst werden durch Untersuchung der Formänderung von Scheibe und Welle.

Gang der Lösung:

1. Berechnung des Schrumpfmaßes ε und der Differenz der Halbmesser von Welle und Scheibe vor dem Aufschrumpfen $\varepsilon \cdot d$ (ohne Rotation).

2. Berechnung der Änderung ϱ_1 des Innenradius der Scheibe nur infolge der Rotation als Funktion von ω .

3. Berechnung von ω .

Lösung:

1. Schrumpfdruck:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{p}{E} \cdot \left[\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + 1 \right] = \\ &= \frac{400}{2 \cdot 10^6} \cdot \frac{1,0069}{1 - 0,0069} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,014 = \\ &= 4,03 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\varepsilon d = 2\varepsilon a = 2 \cdot 4,03 \cdot 10^{-4} \cdot 5 = 4,03 \cdot 10^{-3} \text{ cm.}$$

2. Massendichte:

$$\mu = \frac{s}{g} = \frac{7,86 \cdot 10^{-3}}{9,81} = 8,01 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}^4}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\mu \omega^2}{8} \left(3 + \frac{1}{m} \right) \left(a^2 + b^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) = 0 \text{ für } r = a \end{aligned}$$

$$\sigma_t = \frac{\mu \omega^2}{8} \left(3 + \frac{1}{m} \right) \left[a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right]$$

für $r = a$:

$$\sigma_t = \frac{\mu \omega^2}{4} \left(3 + \frac{1}{m} \right) b^2$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} \right) = \frac{\mu \omega^2}{4 E} b^2 \left(3 + \frac{1}{m} \right)$$

$$q_1 = a \varepsilon_t = \frac{\mu \omega^2}{4 E} \cdot a b^2 \left(3 + \frac{1}{m} \right).$$

$$\begin{aligned} 3. \quad q_1 &= \frac{1}{2} \varepsilon_t \cdot d \\ &= \frac{\mu \omega^2}{4 E} a b^2 \left(3 + \frac{1}{m} \right) = \\ &= \frac{p}{E} a \left[\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + 1 \right], \end{aligned}$$

daraus:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{8 p}{\mu \left(3 + \frac{1}{m} \right) (b^2 - a^2)} = \\ &= \frac{16}{2} \frac{p}{\mu \left(3 + \frac{1}{m} \right) (b^2 - a^2)} = \\ &= 8 \frac{400}{8,01 \cdot 10^{-6} \cdot 3,3 \cdot 3575} = \\ &= 33900 \text{ } 1/\text{sec}^2 \text{ oder} \\ \omega &= 184 \text{ } 1/\text{sec} \text{ oder } n = 1760 \text{ U/min.} \end{aligned}$$

5. Aufgabe.

Es soll das Arbeitsdiagramm einer Uerdinger Ringfeder vorausberechnet werden. Die Ringquerschnitte werden rein auf Zug oder Druck beansprucht. Die Dicke der Ringe ist als klein gegenüber dem Halbmesser anzusehen. Die Reibung zwischen den inneren und äußeren Ringen ist zu berücksichtigen; dagegen ist die Reibung an den Seitenflächen des ersten und letzten Ringes zu vernachlässigen.

Gegeben:

Mittlerer Halbmesser der inneren Ringe $r_1 = 181,5 \text{ mm}$
 Mittlerer Halbmesser der äußeren Ringe $r_2 = 196,5 \text{ mm}$
 Querschnitt der Ringe $F = 220 \text{ mm}^2$

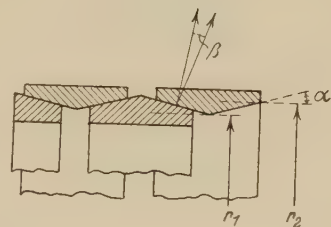


Abb. 221.

Neigung α der konischen

Flächen 1:4 oder $\alpha = 14^\circ 2'$

Reibungskoeffizient $\mu = 0,15$

(Hieraus ist der Reibungswinkel β zu berechnen: $\operatorname{tg} \beta = \mu$); $\beta = 8\frac{1}{2}^\circ$

Elastizitätsmodul $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ at}$

Anzahl der inneren Ringe

von ganzer Breite 9

Anzahl der inneren Ringe

von halber Breite 2

Anzahl der äußeren

Ringe 10

Maximale Zusammen-

drückung 100 mm.

Gesucht:

1. Federkonstante beim Zusammen-drücken der Feder c_1 ,
2. Federkonstante beim Rücklauf der Feder c_2 .
3. Welche Regel ist bei der Dimensionierung zu beachten, damit nach dem Zusammendrücken die Ringe nicht stecken bleiben?

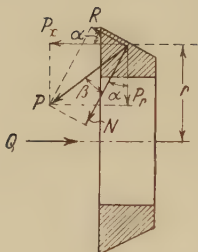


Abb. 222.

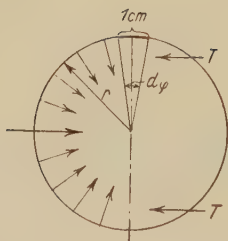


Abb. 223.

Lösung:

Abb. 222 u. 223 zeigen die Kräfte am halben Ring beim Zusammendrücken.

Reibung: $R = \mu \cdot N$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R}{N} = \mu.$$

Kraft pro cm des Umfanges:

$$P_x = P \cdot \sin (\alpha + \beta).$$

Gesamtkraft $Q = P_x \cdot 2 \pi r =$

$$= P \sin (\alpha + \beta) \cdot 2 \pi r.$$

$$P = \frac{Q}{2 \pi r \sin (\alpha + \beta)}.$$

$$P_r = P \cos (\alpha + \beta) = \frac{Q}{2 \pi r} \cot (\alpha + \beta);$$

Tangentialkraft im Ring ist $T = P_r \cdot r$, wie aus dem Gleichgewicht am Ringelement $d\varphi$ bzw. am halben aufgeschnittenen Ring hervorgeht (Abb. 223).

$$T = \frac{Q}{2\pi} \cot(\alpha + \beta).$$

Für die Zusammendrückung und den Rücklauf der Ringfeder gehen die Kraftverhältnisse aus den Abb. 224 u. 225 hervor; demnach gelten die folgenden Beziehungen für den Rücklauf:

$$P_x = P \sin(\alpha - \beta);$$

$$T = \frac{Q}{2\pi} \cot(\alpha - \beta).$$

Auf den einzelnen Ring kommt eine Kraft $2T$. Sie bringt eine Verkleinerung des inneren Ringradius um

$$\Delta r_1 = r_1 \cdot \frac{2T}{EF}$$

und eine Vergrößerung des äußeren Ringradius um

$$\Delta r_2 = r_2 \cdot \frac{2T}{EF}$$

hervor und damit eine Zusammendrückung in axialer Richtung um

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta r_1 + \Delta r_2}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{(r_1 + r_2) \cdot 2T}{EF \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \frac{2(r_1 + r_2) \cot(\alpha + \beta)}{2\pi EF \cdot \operatorname{tg} \alpha} \cdot Q. \end{aligned}$$

Die gesamte Zusammendrückung hervorgerufen von n Zwischenräumen (hier ist $n = 20$) ist $x = n \cdot \Delta x$

$$x = \frac{n(r_1 + r_2) \cot(\alpha + \beta)}{\pi EF \operatorname{tg} \alpha} \cdot Q.$$

1. Die Federkonstante für die Zusammendrückung

$$c_1 = \frac{Q}{x} = \frac{\pi EF \operatorname{tg} \alpha}{n(r_1 + r_2) \cot(\alpha + \beta)} = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

2. Die Federkonstante für den Rücklauf

$$c_2 = \frac{\pi EF \operatorname{tg} \alpha}{n(r_1 + r_2) \cot(\alpha - \beta)} = 460 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

3. Für $\alpha = \beta$ wird $c_2 = 0$; so daß $\alpha > \beta$ oder $\operatorname{tg} \alpha > \mu$ sein muß, damit die Ringe nicht steckenbleiben.

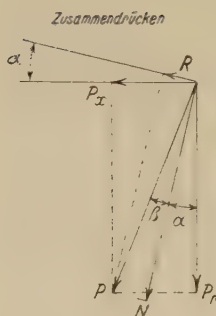


Abb. 224.

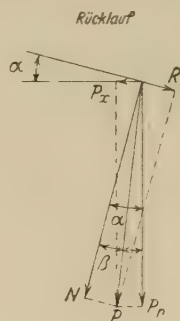


Abb. 225.

6. Aufgabe.

Eine quadratische, am Rand frei aufliegende Platte wird durch eine Belastung von 5000 kg beansprucht, die längs des Umfangs eines Kreises gleichmäßig verteilt ist. Man berechne die Beanspruchung der Platte nach der Bachschen Näherungstheorie, wenn die Plattenstärke $h = 3$ cm ist.

Lösung:

S_1 = Schwerpunkt der Auflagerkraft

S_2 = Schwerpunkt der Belastung

für die linke obere Plattenhälfte.

$$s = d_1 - d_2$$

$$s = \frac{a}{4} \sqrt{2} - \frac{2r}{\pi} = 4,59 \text{ cm}$$

$$M = \frac{P}{2} \cdot s = 11460 \text{ cmkg}$$

$$W = \frac{a \sqrt{2} \cdot h^2}{6}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = 135 \text{ at.}$$

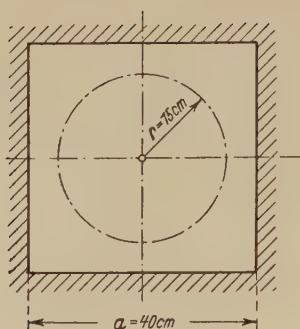


Abb. 226.

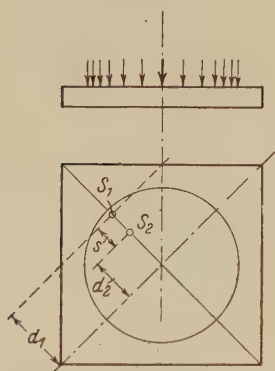


Abb. 227.

III. Abschnitt.

Dynamik.

§ 1. Kinematische Grundbegriffe.

Ist der von einem materiellen Punkte zurückgelegte geradlinige Weg $s(t)$ als Funktion der Zeit t bekannt, so folgt daraus die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt} \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right)$,

die Beschleunigung $b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} \right)$.

Bei der Kurvenbewegung kann der Weg als Funktion der Zeit vektoriell gegeben sein: $\vec{s}(t)$; dann ist

die Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ in Richtung der Tangente an die Kurve,

die Beschleunigung $\vec{b} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$

in der Schmiegungeebene der Kurve gelegen und nach dem Innern gerichtet (s. Abb. 228).

Die beiden Komponenten der Beschleunigung $\vec{b}$, normal und tangential zur Kurve, sind:

$$b_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

(Normal- oder Zentripetalbeschleunigung),

$$b_t = \frac{dv}{dt}$$

(Tangentialbeschleunigung).

In Koordinatendarstellung ist

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt}; & b_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ v_y = \frac{dy}{dt}; & b_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ v_z = \frac{dz}{dt}; & b_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

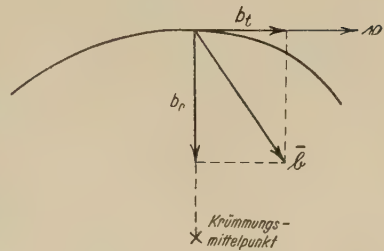


Abb. 228.

Bei der Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse (z. B. Schwungrad) folgt aus dem zurückgelegten Winkelweg $\varphi(t)$:

die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{1}{\text{sec}} \right),$$

die Winkelbeschleunigung

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \left(\frac{1}{\text{sec}^2} \right).$$

Ein Punkt des starren Körpers im Abstand r von der Drehachse hat die Geschwindigkeit $v = r\omega$ und die Beschleunigung $\vec{b}$ mit den Komponenten

$$b_t = \frac{dv}{dt} = r \cdot \varepsilon = r \frac{d\omega}{dt} \quad \text{und} \quad b_r = \omega^2 \cdot r.$$

Die ebene Bewegung des starren Körpers hat drei Freiheitsgrade (zwei translatorische und einen rotatorischen). Sie kann durch Abrollen einer mit dem Körper fest verbundenen Kurve (Herpolhodie) auf einer in der raumfesten Ebene liegenden Kurve (Polhodie) dargestellt werden. Der augenblickliche Berührungspunkt beider Kurven ist der augenblickliche Pol der Bewegung oder das Momentanzentrum (s. Aufgaben 1 und 6).

Die allgemeinste räumliche Bewegung des starren Körpers besitzt 6 Freiheitsgrade (3 translatorische und 3 rotatorische). Nach Zugrundelegen eines beliebigen Bezugspunktes O läßt sich die Bewegung des starren Körpers durch die augenblickliche Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ dieses Punktes und den augenblicklichen Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ des starren Körpers darstellen; dabei ist $\vec{\omega}$ von der Wahl des Bezugspunktes unabhängig. Wird die Wahl des Bezugspunktes so getroffen, daß $\mathbf{v}_0$ und $\vec{\omega}$ in die gleiche Richtung fallen, so spricht man von einer Bewegungsschraube. Jede endliche Bewegung eines starren Körpers läßt sich durch die Auf-

einanderfolge unendlich vieler, unendlich kleiner solcher Schraubenbewegungen darstellen.

1. Aufgabe.

Ein Rad $ABCD$ rollt so, daß sich sein Mittelpunkt mit der Geschwindigkeit v bewegt. Zu bestimmen ist die augenblickliche Geschwindigkeit für die vier Punkte A, B, C, D des Umfangs nach Größe und Richtung.

Lösung:

$$v_A = 0.$$

$$v_B = v_D = v\sqrt{2};$$

$$v_C = 2v;$$

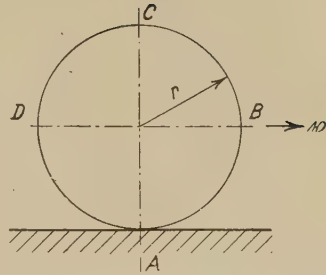


Abb. 229.

2. Aufgabe.

Ein Flugzeug durchfliegt die drei Seiten eines Stoppdreiecks in den angegebenen Zeiten. Man bestimme die Eigengeschwindigkeit v des Flugzeugs sowie Größe und Richtung der Windgeschwindigkeit w .

Lösung: $v = 72,1 \text{ m/sec}$
 $w = 11,0 \text{ m/sec}.$

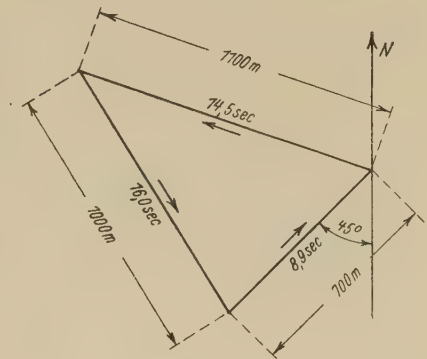


Abb. 230.

3. Aufgabe.

Die Triebräder einer elektrischen Lokomotive werden vom Motor aus mittels Zahnrades 1 (Motorritzel) und Zahnrades 2 angetrieben. Zahnrad 2 ist mit dem Trieb-
 rad fest verbunden. Wie groß ist Winkelgeschwindigkeit und Drehzahl pro min des Motors bei einer Fahrgeschwindigkeit von 90 km/Std.

Lösung:

$$v = 90 \text{ km/Std.} = 25 \text{ m/sec}$$

$$\omega_2 = \frac{v}{1,25\pi} \cdot 2\pi = 40 \text{ 1/sec}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}; \quad \omega_1 = 40 \cdot \frac{910}{340} = 107 \text{ 1/sec}$$

$$\frac{107}{2\pi} \cdot 60 = 1020 \text{ U/min.}$$

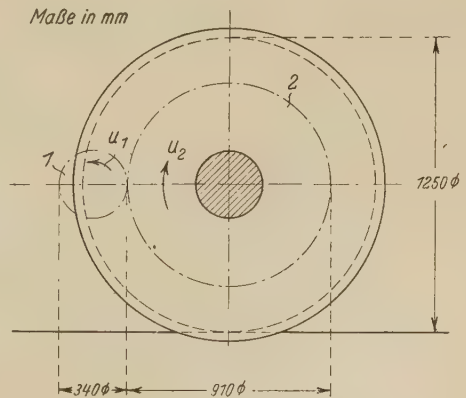


Abb. 231.

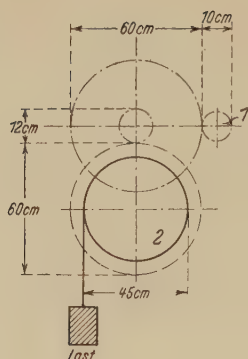


Abb. 232.

4. Aufgabe.

Ein Elektromotor, auf dessen Achse ein Ritzel 1 sitzt, treibt über ein Zahnrad-vorgelege die Seiltrommel 2 einer Winde an. Wie groß muß die Tourenzahl n' des Motors sein, wenn die Geschwindigkeit der Last $v = 1$ m/sec betragen soll?

Lösung: Die Übersetzung ist

$$\frac{60}{12} \cdot \frac{60}{10} = 30 \text{ fach.}$$

$$v = 1 \text{ m/sec} = 6000 \text{ cm/min} = n' \cdot d \cdot \pi = n' \cdot 45 \cdot \pi$$

$$n' = \frac{6000}{45 \pi} = \frac{400}{3 \pi} \frac{\text{U}}{\text{min.}}$$

5. Aufgabe.

Die Welle 1 und 2, auf denen Schwungmassen vom Trägheitsmoment $J_1 = 1000 \text{ kgcmsec}^2$ und $J_2 = 800 \text{ kgcmsec}^2$ sitzen, sind durch Zahnräder mit dem Übersetzungsverhältnis 2:3 gekuppelt.

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{2}{3}$$

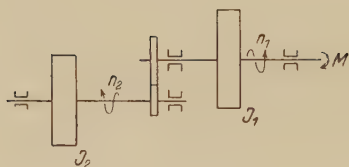


Abb. 233.

Die Welle 1 soll in 10 sec vom Stillstand aus gleichförmig auf die Drehzahl $n_1 = 1500$ U/min beschleunigt werden.

Gesucht ist

1. Das Drehmoment M , das während der Anfahrzeit an der Welle 1 wirken muß,
2. die Leistung N in PS, die am Ende der Anfahrzeit aufzuwenden ist.

Lösung:

$$1. \quad M = J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} + J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} \cdot \frac{3}{2},$$

$$\omega_1 = \frac{1500 \cdot \pi}{30} = 157 \text{ 1/sec,}$$

$$\text{wobei } \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{157}{10} = 15,7 \text{ 1/sec}^2$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = 23,6 \text{ 1/sec}^2.$$

$$M = 10^3 \cdot 15,7 + 800 \cdot 23,6 \cdot \frac{3}{2} = 44100 \text{ kg cm.}$$

$$2. N = \frac{M \cdot \omega_1}{7500} (\text{PS}) = \frac{441 \cdot 157}{75} = 920 \text{ PS.}$$

6. Aufgabe.

In einem Einkurbelgetriebe besitzt die Kurbel die konstante Winkelgeschwindigkeit ω_1 . Gefragt ist:

- Wie groß ist in der gezeichneten Stellung die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω_2 ?
- Wie groß wird ω_2 , wenn sich die Kurbel um 90° gedreht hat?
- In welchen Lagen wird ω_2 Null? (Nur angenäherte zeichnerische Lösung verlangt.)

Lösung:

- a) Momentanzentrum O_1 (s. Abb. 235)

$$\begin{cases} v_A = \omega \cdot O_1 A; & \begin{cases} v_B = \omega \cdot O_1 B, \\ v_A = \omega_1 \cdot r_1; & \begin{cases} v_B = \omega_2 \cdot r_2, \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{also: } \omega_2 = \frac{v_B}{r_2} = \omega \cdot \frac{O_1 B}{r_2} = \frac{v_A}{O_1 A} \cdot \frac{O_1 B}{r_2}$$

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{O_1 B}{O_1 A} = \omega_1.$$

Oder:

$$v_A : v_B = \overline{O_1 A} : \overline{O_1 B} = 1 : \sqrt{2}$$

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{v_B}{v_A} \cdot \frac{r_1}{r_2} = \omega_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_2 = \omega_1.$$

- b) Momentanzentrum O_2 (s. Abb. 236)

$$v_A : v_B = \overline{O_2 A} : \overline{O_2 B} = (35 + 25) : 25\sqrt{2}$$

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{v_B}{v_A} \cdot \frac{r_1}{r_2} = \omega_1 \cdot \frac{25\sqrt{2}}{60} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_2 = \frac{5}{12} \omega_1.$$

- c) (s. Abb. 237) $\omega_2 = 0$.

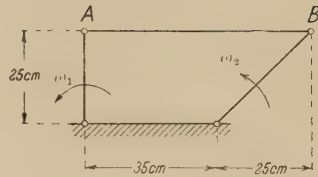


Abb. 234.

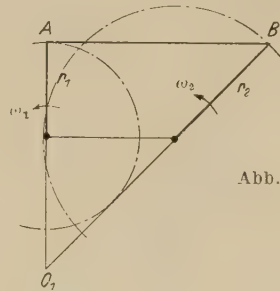


Abb. 235.

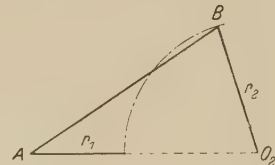


Abb. 236.

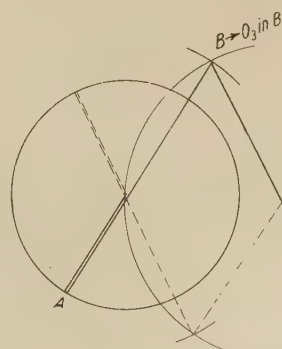


Abb. 237.

Dieser Fall tritt dann ein, wenn die Schwinge in der Umkehrstellung steht (die Koppel AB beschreibt in diesem Augenblick eine reine Drehbewegung um B , weshalb Kurbel und Koppel in eine Richtung fallen).

Zwei symmetrische Lagen sind möglich.

§ 2. Geradlinige Bewegung des materiellen Punktes und Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

Die dynamische Grundgleichung für die geradlinige Bewegung des materiellen Punktes lautet:

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = P.$$

Ist die Kraft P gegeben, wie beim freien Fall, so folgt aus der dynamischen Grundgleichung der Weg s als Funktion der Zeit; andererseits kann nach der Kraft P gefragt werden, wenn eine bestimmte Beschleunigung $\frac{d^2 s}{dt^2}$ vorgeschrieben ist.

Die Formeln für geradlinig gleichförmig beschleunigte Bewegung lauten:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= v = bt + v_0 \\ s &= \frac{1}{2} bt^2 + v_0 t \quad \text{oder} \quad s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t \\ \text{oder} \quad s &= \frac{v^2 - v_0^2}{2b}. \end{aligned}$$

Mit $b = g = 981 \text{ cm/sec}^2$ gehen die Formeln in die für die Fallbewegung ohne Luftwiderstand gültigen über.

Begriff der Federkonstante c : $c = 1000 \text{ kg/cm}$ bedeutet, daß zur Zusammendrückung oder Verlängerung der Feder um 1 cm die Kraft von 1000 kg erforderlich ist.

Die Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse läßt sich ähnlich behandeln, wie die geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes.

Die dynamische Grundgleichung für die Drehbewegung lautet: $J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M$,

worin J = Massenträgheitsmoment in bezug auf die Drehachse ($\dim J = \text{kg cm sec}^2$);

$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$ = Winkelbeschleunigung und

M = Drehmoment.

Mit $M = 0$ wird $\omega = \text{const}$; mit

$M = \text{const}$ wird $\frac{d\omega}{dt} = \text{const}$ (gleichförmig beschleunigte oder verzögerte Drehbewegung).

Hiefür gilt, entsprechend wie oben:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = ct + \omega_0.$$

$$\varphi = \frac{c}{2} t^2 + \omega_0 t.$$

1. Aufgabe.

Ein Wagen vom Gewicht 10 kg rollt auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel 30° ohne Anfangsgeschwindigkeit hinab. Wie lange braucht er, um einen Weg von $l = 2$ m zurückzulegen und welche Geschwindigkeit hat er nach dieser Zeit erlangt?

Lösung:

$$b = g \sin 30^\circ = \frac{g}{2}$$

$$s = \frac{b}{2} t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{b}} = \sqrt{\frac{4s}{g}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 200}{981}} = 0,902 \text{ sec}$$

$$v = b \cdot t = 0,9 \cdot \frac{987}{2} = 441 \text{ cm/sec.}$$

2. Aufgabe.

Ein Körper vom Gewicht $G = 20$ kg gleitet unter Überwindung der Reibung (Reibungskoeffizient $\mu = 0,3$) auf einer schiefen Ebene vom Neigungsverhältnis $\text{tg } \alpha = 2/3$ ohne Anfangsgeschwindigkeit hinab.

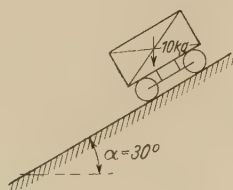


Abb. 238.

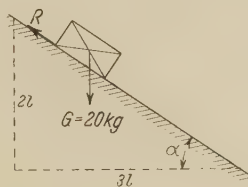


Abb. 239.

Welche Geschwindigkeit v hat der Körper nach $t = 4$ sec erlangt und welchen Weg s hat er dann zurückgelegt?

Wie groß ist die in dieser Zeit von 4 sec geleistete Reibungsarbeit A_R ?

Bei welchem Mindestwert μ_0 des Reibungskoeffizienten würde sich der Körper überhaupt nicht mehr in Bewegung setzen?

Lösung:

$$R = N \cdot \mu = G \cdot \cos \alpha \cdot \mu = \mu \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot G = \\ = \frac{0,9}{\sqrt{13}} G (= 4,98 \text{ kg}).$$

Beschleunigende Kraft

$$K = G \sin \alpha - R = G \left(\frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{0,9}{\sqrt{13}} \right) = \\ = G \cdot \frac{1,1}{\sqrt{13}}.$$

$$b = \frac{1,1}{\sqrt{13}} g = 0,305 g = 299 \text{ cm/sec}^2$$

$$v = b \cdot t = 299 \cdot 4 = 1196 \text{ cm/sec}$$

$$s = \frac{1}{2} b t^2 = \frac{299}{2} \cdot 16 = 2392 \text{ cm}$$

$$A_R = 2392 \cdot 4,98 = 11950 \text{ cmkg} = \\ = 119,5 \text{ mkg}.$$

Oder:

Verlust an potentieller Energie

$$= G \cdot h = 266 \text{ mkg}$$

$$\text{Kinetische Energie} = \frac{1}{2} m v^2 = 147 \text{ mkg}$$

$$\text{Verlust: } 119 \text{ mkg}$$

$$\text{Für Stillstand: } \mu_0 \geq \frac{2}{3} (\cong \operatorname{tg} \alpha)$$

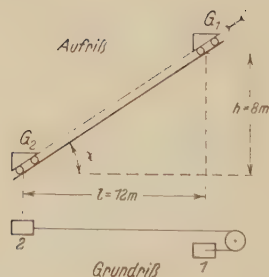


Abb. 240.

3. Aufgabe.

An den Enden des Zugseiles eines Schrägaufzuges hängen Wagen vom Gewicht $G_1 = 350$ kg und $G_2 = 300$ kg. Das Seil ist masselos anzunehmen. Der Wagen 1 sei zuerst in der gezeichneten Lage festgehalten und werde dann plötzlich losgelassen. Die Reibung sei vernachlässigt.

Mit welcher Geschwindigkeit v und nach welcher Zeit t kommt der Wagen 1 unten an?

Lösung:

Gesamtmasse

$$m = \frac{G_1 + G_2}{g} = \frac{650}{981} \text{ kg cm}^{-1} \text{ sec}^2.$$

Gleichgewichtskomponenten parallel zur schiefen Ebene:

$$H_2 = G_2 \sin \alpha \quad \text{und} \quad H_1 = G_1 \sin \alpha.$$

Beschleunigende Kraft

$$P = H_1 - H_2 = (G_1 - G_2) \sin \alpha = 27,8 \text{ kg.}$$

Beschleunigung

$$\begin{aligned} b &= \frac{P}{m} = \frac{G_1 - G_2}{m} \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{27,8 \cdot 981}{650} = 0,42 \text{ m/sec}^2. \end{aligned}$$

$$\text{Aus } s = \frac{1}{2} b t^2 \text{ folgt } t = \sqrt{\frac{2s}{b}} = 8,3 \text{ sec}$$

und damit $v = b t = 3,5 \text{ m/sec.}$

4. Aufgabe.

Wie groß ist Bremsweg s und Bremszeit t für einen Zug von $v = 90 \text{ km/Std.}$ Geschwindigkeit

1. in der Ebene,
2. in der Steigung 1:40 und
3. im Gefälle 1:40,

wenn die durch die Bremsen erreichbare Bremsverzögerung in der Ebene konstant zu $b = 1,1 \text{ msec}^{-2}$ bekannt ist?

Lösung:

1. Mit $b_1 = 1,1 \text{ m/sec}^2$ wird

$$t_1 = \frac{v}{b_1} = 22,7 \text{ sec}$$

und $s_1 = \frac{v^2}{2 b_1} = 284,1 \text{ m.}$

2. $b_2 = 1,1 + \frac{9,81}{40} = 1,345 \text{ m/sec}^2;$

$$t_2 = \frac{v}{b_2} = 18,6 \text{ sec}$$

und $s_2 = \frac{v^2}{2 b_2} = 232 \text{ m.}$

$$3. \quad b_3 = 1,1 - \frac{9,81}{40} = 0,855 \text{ m/sec}^2;$$

$$t_3 = \frac{v}{b_3} = 29,3 \text{ sec}$$

und $s_3 = \frac{v^2}{2 b_3} = 366 \text{ m.}$

5. Aufgabe.

Bei einer Förderanlage soll eine Fahrzeit von $T = 38 \text{ sec}$ eingehalten werden. Wie groß ist die Höchstgeschwindigkeit v_m zu wählen, wenn gegeben ist:

Förderhöhe $H = 570 \text{ m.}$

Anfahrbeschleunigung $b_a = 3,2 \text{ m/sec}^2.$

Bremsverzögerung $b_v = 2,0 \text{ m/sec}^2,$

Beim Anfahren wird nach Erreichung der Höchstgeschwindigkeit mit dieser weitergefahren.

Lösung:

$$T = t_a + t_m + t_v$$

$$t_a = \frac{v_m}{b_a}$$

$$t_v = \frac{v_m}{b_v}$$

$$t_m = \frac{s_a + s_b}{v_m}$$

$$s_a = \frac{1}{2} t_a \cdot v_m = \frac{1}{2} \frac{v_m^2}{b_a}$$

$$s_v = \frac{1}{2} \frac{v_m^2}{b_v}$$

eingesetzt:

$$T = \frac{v_m}{b_a} + \frac{H - \frac{v_m^2}{2} \left(\frac{1}{b_a} + \frac{1}{b_v} \right)}{v_m} + \frac{v_m}{b_v} = 38 \text{ sec.}$$

Aus dieser quadratischen Gleichung in v_m ergibt sich:

$$v_m = 75 \text{ m/sec unbrauchbar!}$$

$$v_m = 18,7 \text{ m/sec. Hiermit wird}$$

$$t_a = 5,85 \text{ sec}$$

$$t_v = 9,35 \text{ sec.}$$

6. Aufgabe.

Ein Bombenflugzeug fliegt horizontal, senkrecht über die Kiellinie eines geradeaus fahrenden Schiffes und in gleicher Richtung wie dieses.

Unter welchem Winkel α muß im Moment des Bombenabwurfs das Schiff anvisiert werden, ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes?

Geschwindigkeit des Flugzeugs

$$v_1 = 180 \text{ km/Std.},$$

Geschwindigkeit des Schiffes

$$v_2 = 50 \text{ km/Std.},$$

Flughöhe $h = 700 \text{ m}$.

Lösung:

$$\alpha = 31^\circ 40'.$$

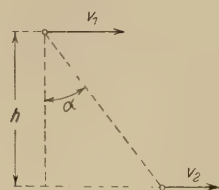


Abb. 241.

7. Aufgabe.

Es soll die Bewegung eines mit der Anfangsgeschwindigkeit Null von einem Ablaufberg abrollenden Eisenbahnwagens untersucht werden, mit Berücksichtigung der Reibung.

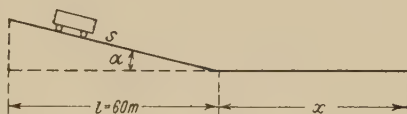


Abb. 242.

Gesamtgewicht d. Wagens $G = 20 \text{ t}$.

Gesamter Reibungswider-

stand des Wagens $R = 60 \text{ kg}$.

Länge des Ablaufbergs $l = 60 \text{ m}$.

Gefälle des Ablaufbergs $s = 40^\circ/100$.

Gesucht ist:

1. Die Laufweite x ,
2. die Höchstgeschwindigkeit v ,
3. die gesamte Laufzeit t .

Lösung:

$$1. \quad x = 740 \text{ m};$$

$$2. \quad v_{\max} = 660 \text{ cm/sec};$$

$$3. \quad t = 242 \text{ sec.}$$

§ 3. Krummlinige Bewegung des materiellen Punktes und der Energiesatz.

Die dynamische Grundgleichung für die krummlinige Bewegung des materiellen Punktes lautet:

a) in Vektorform: $m \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = \mathfrak{P}$ oder $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \mathfrak{P}.$

b) in Koordinatendarstellung:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \cdot \frac{dv_x}{dt} = X$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = m \cdot \frac{dv_y}{dt} = Y$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = m \cdot \frac{dv_z}{dt} = Z.$$

Die natürliche Zerlegung der Kraft in eine Tangential- und eine Normalkomponente ergibt die folgende Zerlegung der dynamischen Grundgleichung:

$$P_t = m \cdot b_t = m \frac{dv}{dt};$$

$$P_r = m \cdot b_r = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r.$$

Wird die Kurve, z. B. der Kreis, mit konstanter Geschwindigkeit durchheilt, so wird $P_t = 0$, und es bleibt nur die Zentripetalkraft P_r . Aus der dynamischen Grundgleichung $\mathfrak{P} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ folgt als erstes

Integral der Energiesatz:

$$\int \mathfrak{P} d\vec{s} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = E - E_0,$$

in Worten: Die Arbeit der äußeren Kraft $\mathfrak{P}$ ist gleich der Zunahme an kinetischer Energie des materiellen Punktes. Besitzt die Kraft ein Potential U , von dem sie sich ableiten läßt, so kann man das obige Integral auswerten und der Energiesatz lautet: $U + E = U_0 + E_0 = \text{const}$; d. h. die Summe aus potentieller Energie U und kinetischer Energie E bleibt dauernd konstant. Z. B. ist beim freien Fall

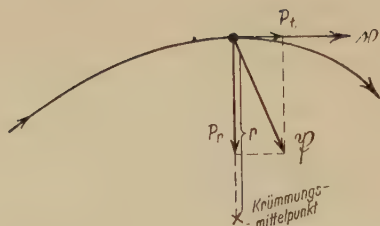


Abb. 243.

$U = Q \cdot h$, wenn Q das Gewicht und h die Erhebung über einem Nullniveau bedeutet.

Arbeit eines Momentes:

$$dA = M d\varphi$$

(wobei M und φ sich auf dieselbe Achse beziehen).

Leistung eines Momentes:

$$\frac{dA}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} = M \cdot \omega.$$

Energiesatz für das Moment:

$$A = \frac{1}{2} J \omega^2 - \frac{1}{2} J \omega_0^2 = \int M d\varphi.$$

1. Aufgabe.

Ein materieller Punkt gleitet reibungslos von einer Höhe h ohne Anfangsgeschwindigkeit herab und durchläuft hierauf eine Kreisschleife vom Radius r . Wie groß muß die Ausgangshöhe h gewählt werden, damit im höchsten Punkt A der Kreisbahn kein Abspringen des materiellen Punktes erfolgt?

Lösung:

Es muß sein:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} \geq G = m \cdot g$$

$$v^2 \geq g \cdot r$$

Wegen des Energiesatzes ist

$$v^2 = 2gh' \text{ mit } h' = h - 2r$$

$$2gh \geq gr$$

$$h' > \frac{r}{2}$$

$$h > \frac{5}{2} r.$$

2. Aufgabe.

Ein Minenwerfer beschießt ein höher gelegenes Ziel, dessen Entfernung $s = 600$ m und Geländewinkel $\alpha = 8^\circ$ bekannt ist.

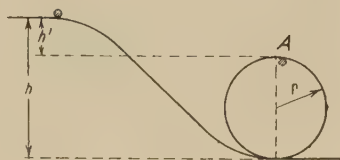


Abb. 244.

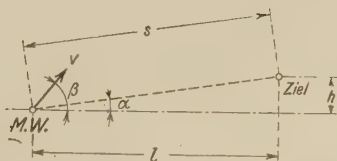


Abb. 245.

Welche Erhöhung β ist einzustellen, wenn die Anfangsgeschwindigkeit der Mine $v = 110 \text{ m/sec}$ ist? Der Luftwiderstand soll vernachlässigt werden.

Wie groß ist ferner die Flugdauer?

Lösung:

Für die Wurfparabel gilt:

$$v_x = v \cdot \cos \beta$$

$$v_y = v \cdot \sin \beta - gt,$$

daraus

$$x = v \cdot \cos \beta \cdot t$$

$$y = v \cdot \sin \beta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Die Bedingungen für das Treffen des Zieles lauten:

$$l = v \cos \beta \cdot t$$

$$h = v \sin \beta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Durch Elimination von t und einige Umformungen erhält man

$$\cos^2 \beta = \frac{\cos^2 \alpha}{2} \left[1 - \frac{g h}{v^2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{g h}{v^2} \right)^2 - \left(\frac{g s}{v^2} \right)^2} \right],$$

woraus

$$\cos \beta_1 = 0,912 \text{ mit } \beta_1 = 24^\circ 10'$$

und

$$\cos \beta_2 = 0,265 \text{ mit } \beta_2 = 74^\circ 40'$$

folgt.

Es sind demnach zwei Einstellungen β_1 und β_2 möglich, um das Ziel zu treffen.

Flugdauern:

$$T = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v \cos \beta}$$

$$T_1 = \frac{l}{v \cos \beta_1} = \frac{600 \cdot \cos 8^\circ}{110 \cdot 0,912} = 5,95 \text{ sec}$$

$$T_2 = \frac{l}{v \cdot \cos \beta_2} = \frac{600 \cdot \cos 8^\circ}{110 \cdot 0,265} = 20,5 \text{ sec.}$$

3. Aufgabe.

Gegeben ist ein Zentrifugalregulator von nebenstehenden Abmessungen.

Wie groß ist bei einer Umdrehungszahl $n = 120$ pro min der Ausschlagwinkel α ?

Wie groß ist das größte von den Armen aufzunehmende Biegemoment?

Lösung:

$$\omega = \frac{120}{30} \pi = 4 \pi.$$

Momentenpunkt A (s. Abb. 247):

$$\begin{aligned} \frac{G}{2} l \sin \alpha + \frac{G}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot l \cos \alpha + Q \cdot 2 l \sin \alpha - \\ - \frac{Q}{g} 2 l \sin \alpha \omega^2 \cdot 2 l \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Hieraus:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{G + 2Q}{\frac{Q}{g} \cdot 4 l \omega^2} = 0,652 \\ \alpha &= 49^\circ 20'. \end{aligned}$$

$M_{\max}$ in B:

$$\begin{aligned} M_{\max} &= Q l \sin \alpha - \frac{Q}{g} \cdot 2 l \sin \alpha \omega^2 \cdot l \cos \alpha \\ &= (-) 27,4 \text{ cmkg}. \end{aligned}$$

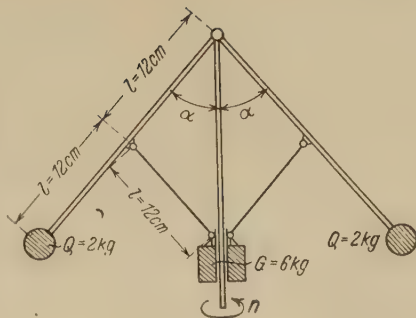


Abb. 246

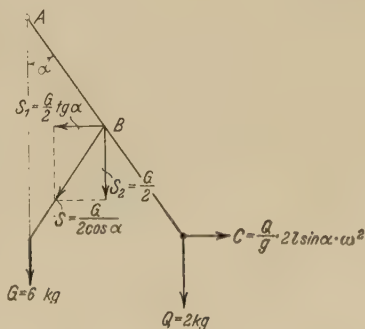


Abb. 247.

4. Aufgabe.

Die Feder eines Federreglers sei in der gezeichneten Stellung ($\alpha_1 = 45^\circ$) vollständig entlastet.

Gegeben ist:

Federkonstante $c = 15 \text{ kg/cm}$,

Gewicht eines Schwingkörpers $G = 8 \text{ kg}$,

Gesamtgewicht d. Muffe $Q = 70 \text{ »}$

Länge der Arme $l = 30 \text{ cm}$,

Ursprüngliche Feder-

länge $s = 42,4 \text{ cm}$.

Gesucht:

1. Drehzahl pro Minute n_1 für $\alpha_1 = 45^\circ$,

2. Drehzahl pro Minute n_2 für $\alpha_2 = 30^\circ$.

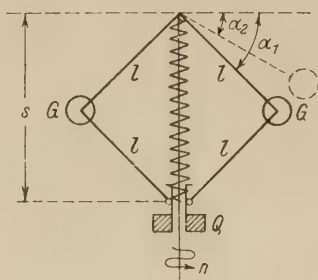


Abb. 248.

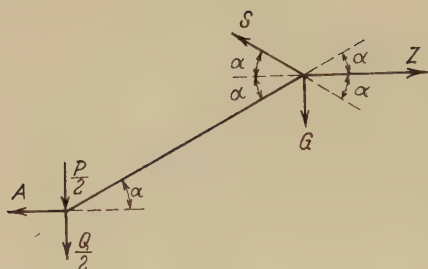


Abb. 249.

Lösung:

An jedem der beiden Schwungkörper $G = 8 \text{ kg}$ denke man sich die Zentrifugalkraft $Z = \frac{G}{g} r \cdot \omega^2$ mit $r = l \cdot \cos \alpha$ und $\omega = \frac{n \cdot \pi}{30}$ angebracht, um die dynamische Aufgabe auf eine statische zurückzuführen. Da die vier Stangen an beiden Enden Gelenke haben, können sie nicht auf Biegung beansprucht werden. Die Kräfte an einer Verbindungsstange zwischen G und Q sind aus Abb. 249 ersichtlich.

Im Punkte der Schwungmasse G greifen an: Das Gewicht G senkrecht nach unten, die Zentrifugalkraft Z horizontal nach außen und die in Richtung der zweiten Stange verlaufende Zugkraft S ; ferner im Punkt der Muffe Q : das halbe Muffengewicht $\frac{Q}{2}$, die halbe Federkraft $\frac{P}{2}$ und die von der Führung ausgeübte horizontale Kraft A . Da die Resultierende der Kräfte an beiden Endpunkten der Stange in die Richtung der Stange fallen und einander gleich sein müssen, erhält man folgende Gleichungen:

$$1. \text{ für } \alpha = \alpha_1 = 45^\circ (\text{mit } P = 0): A = \frac{Q}{2};$$

$$S = (Z + G) \cos 45^\circ$$

$$(Z - G) \cos 45^\circ = 2 \frac{Q}{2} \cos 45^\circ \text{ oder}$$

$$Z = Q + G = m r \omega^2, \text{ woraus}$$

$$\omega_1 = 21,2 \text{ 1/sec und}$$

$$n_1 = \frac{30}{\pi} \cdot \omega_1 = 203 \text{ U/min folgt.}$$

$$2. \text{ für } \alpha = \alpha_2 = 30^\circ:$$

$$P = c \cdot x \text{ mit}$$

$$x = l(\sqrt{2} - 2 \sin \alpha) = l(\sqrt{2} - 1)$$

$$P = 15 \cdot 30(\sqrt{2} - 1) \text{ kg} = 186 \text{ kg.}$$

Aus der Bedingung, daß die Kräfte $\frac{Q}{2}$, $\frac{P}{2}$ und A eine Resultierende R in Rich-

tung des Stabes ergeben müssen, folgt
 $R = \frac{Q + P}{2 \sin \alpha}$ und daraus, daß sich Z , G
 und S zu einer entgegengesetzt gleichen
 Resultierenden R zusammensetzen lassen
 müssen, folgt ferner

$$\begin{aligned} Z &= 2 R \cos \alpha + G \cot \alpha = \\ &= (Q + G + P) \cot \alpha = m r \omega_2^2, \end{aligned}$$

woraus sich

$$\omega_2 = 46,5 \frac{1}{\text{sec}} \text{ oder } n_2 = 444 \text{ U/min}$$

ergeben.

5. Aufgabe.

Das Seil einer Schachtförderanlage wird durch eine mit dem Motor gekuppelte Seiltreibscheibe (T) angetrieben. Durch ein Unterseil (U) vom gleichen Gewicht pro m wie für das Oberseil (O) ist vollkommener Seilausgleich erreicht. Es sollen die Motorleistungen bei Förderung einer Nutzlast untersucht werden.

Gegeben:

Durchmesser der Seiltreibscheibe

$$D_1 = 2 r_1 = 5,5 \text{ m.}$$

Durchmesser der Seilleitscheiben

$$D_2 = 2 r_2 = 4,5 \text{ m.}$$

Trägheitsmoment der Treibscheibe

$$J_1 = 6000 \text{ kgmsec}^2$$

Trägheitsmoment einer Leitscheibe

$$J_2 = 900 \text{ kgmsec}^2$$

Gewicht des unteren Förderkorbes einschließlich Nutzlast $G_1 = 6 \text{ t.}$

Gewicht des oberen Förderkorbes

$$G_2 = 3 \text{ t.}$$

Gesamtlänge des Seiles $l = 1600 \text{ m.}$

Seilgewicht $q = 7,5 \text{ kg/m.}$

Die geforderte Anfahrbeschleunigung ist

$$b_a = 0,9 \text{ m/sec}^2.$$

Nach Erreichung der Höchstgeschwindigkeit

$$v = 14 \text{ m/sec}$$

wird diese bis zum Beginn des Bremsens beibehalten.

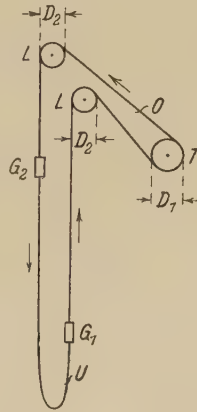


Abb. 250.

Gesucht:

- Motorleistung in PS am Ende der Anfahrperiode (N_1),
- Motorleistung in PS während der Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit (N_2).

Die Reibungsverluste seien vernachlässigt.

Lösung:

Die Motorleistung am Ende der Anfahrperiode setzt sich zusammen aus:

Leistung für Aufwärts- bzw. Abwärtsbewegung der beiden Förderkörbe:

$$(G_1 - G_2) \cdot v = 3000 \cdot 14 \\ = 42000 \text{ mkg/sec} = 560 \text{ PS};$$

Leistung zur Beschleunigung der beiden Förderkörbe:

$$\frac{G_1 + G_2}{g} \cdot b_a \cdot v = \frac{9000}{9,81} \cdot 0,9 \cdot 14 = 154 \text{ PS.}$$

Leistung zur Beschleunigung des Seiles:

$$\frac{l \cdot q}{g} \cdot b_a \cdot v = \frac{1600 \cdot 7,5}{9,81} \cdot 0,9 \cdot 14 = 205 \text{ PS.}$$

Leistung zur Beschleunigung der Treibscheibe:

$$J_1 \cdot \frac{b_a}{r_1} \cdot \frac{v}{r_1} = 6000 \cdot \frac{0,9 \cdot 14}{2,75^2} = 134 \text{ PS.}$$

Leistung zur Beschleunigung der beiden Seilscheiben:

$$2 J_2 \cdot \frac{b_a}{r_2} \cdot \frac{v}{r_2} = 1800 \cdot \frac{0,9 \cdot 14}{2,25^2} = 60 \text{ PS.}$$

Gesamtleistung am Ende der Anfahrperiode:

$$N_1 = 1113 \text{ PS.}$$

Leistung während gleichmäßiger Fahrt:

$$N_2 = 560 \text{ PS.}$$

Leistungsdiagramm s. Abb. 251.



Abb. 251.

6. Aufgabe.

Eine Scheibe vom Gewicht G , vom Radius $r = 20$ cm und überall gleicher Dicke rotiert mit $n_0 = 1800$ U/min. Sie fällt rotierend ohne anfängliche Translationsgeschwindigkeit ($v_0 = 0$) aus sehr geringer Höhe auf eine gleichmäßig glatte ebene Fläche. Die Reibungszahl zwischen Scheibe und Unterlage sei $\mu = 0,2$.



Abb. 252.

Die rollende Reibung sei vernachlässigt.

- Nach welcher Zeit t_1 geht die beschleunigte Bewegung in eine konstante über?
- Welche konstante Winkelgeschwindigkeit ω_1 und Translationsgeschwindigkeit v_1 wird die Scheibe erreichen?

Lösung:

Während der ersten gleichmäßig beschleunigten Periode findet Gleiten zwischen Rad und Unterlage statt. Die gleitende Reibung $R = \mu \cdot G$ wirkt am Radumfang nach rechts:

Nach dem Schwerpunktsatz:

$$R = \mu \cdot G = m x'';$$

$$(1) \quad b = x'' = \mu \cdot g = 0,2 \cdot 981 = 196 \text{ cm/sec}^2.$$

Die dynamische Grundgleichung für Drehung der Scheibe um ihren Schwerpunkt:

$$J \frac{d\omega}{dt} = - R \cdot r = - \mu G \cdot r;$$

$$\frac{d\omega}{dt} = - \mu \cdot \frac{G \cdot r}{J};$$

$$J = \frac{\pi r^4}{2} \cdot \frac{G}{g \cdot \pi r^2} = \frac{G r^2}{2 g};$$

$$(2) \quad \frac{d\omega}{dt} = - \mu \cdot \frac{2g}{r} = - 19,6 \frac{1}{\text{sec}^2}.$$

Es findet so lange Gleiten statt, bis die Rollbedingung $v_1 = r \omega_1$ erfüllt ist, wobei v_1 die Geschwindigkeit des Schwerpunktes bedeutet. Aus (1) und (2) folgt:

$$v = \mu g \cdot t \quad \text{und} \quad \omega = - \mu \frac{2g}{r} \cdot t + \omega_0.$$

Rollbedingung:

$$\mu g t_1 = r \left(\omega_0 - \mu \frac{2g}{r} t_1 \right);$$

$$\omega_0 = \frac{1800 \cdot \pi}{30} = 188,5 \text{ 1/sec.}$$

$$a) \quad t_1 = \frac{r \omega_0}{3 \mu g} = \frac{20 \cdot 188,5}{3 \cdot 196} = 6,41 \text{ sec}$$

$$b) \quad \begin{cases} v_1 = b t_1 = 1260 \text{ cm/sec} \\ \omega_1 = \omega_0 + \frac{d\omega}{dt} \cdot t_1 = 188,5 - \\ - 19,6 \cdot 6,41 = 63 \text{ 1/sec.} \end{cases}$$

Andere Lösung mit Hilfe des Energiesatzes gelingt durch den Ansatz:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} J \omega_0^2 = \\ & = \frac{1}{2} J \omega_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 + R s_1 + R r \varphi_1, \end{aligned}$$

worin s_1 den vom Schwerpunkt zurückgelegten Weg und φ_1 den zurückgelegten Winkelweg des Rades bis zum Eintritt der Rollbewegung bedeuten.

7. Aufgabe.

Die Seiltrommel eines Kranhubwerkes wird über ein Vorgelege von einem Elektromotor angetrieben.

Gegeben:

Anfahrbeschleunigung der Last

$$b = 0,10 \text{ msec}^{-2},$$

Maximale Hubgeschwindigkeit

$$v_m = 15 \text{ m/min,}$$

Trommel- und Rollendurchmesser

$$2r = 0,6 \text{ m,}$$

Trägheitsmoment des Motorankers

$$J_1 = 0,25 \text{ kgmsec}^2,$$

Trägheitsmoment der Vorgelegewelle
(Zahnrad und Ritzel)

$$J_2 = 0,1 \text{ kgmsec}^2,$$

Trägheitsmoment der Trommel einschl.

$$\text{Zahnrad} \dots J_3 = 1,2 \text{ kgmsec}^2,$$

Trägheitsmoment der Flaschenrolle

$$J_4 = 0,05 \text{ kgmsec}^2,$$

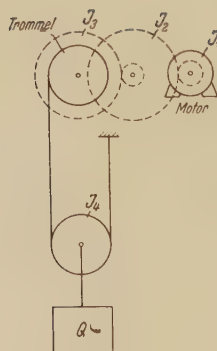


Abb. 253.

Gewicht der Last einschl. Flasche

$$Q = 5000 \text{ kg,}$$

Zahnradübersetzung beide Male

$$\lambda = 5 : 1.$$

Das Seilgewicht und die Reibungswiderstände sind zu vernachlässigen.

Gesucht:

1. Nach welcher Hubhöhe h_1 wird die Maximalgeschwindigkeit erreicht?
2. Verlauf des Motordrehmomentes während des Anfahrens und bei konstanter Hubgeschwindigkeit, insbesondere das maximale Drehmoment.
3. Verlauf der aufzuwendenden Leistung, insbesondere die maximale Leistung in PS.
4. Während des Hebens mit Höchstgeschwindigkeit werde der Motorstrom ausgeschaltet, so daß freier Auslauf erfolgt. — Nach welcher Hubstrecke h_2 kommt die Last zum Stillstand?

Lösung:

1. Beim Anfahren handelt es sich um eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung $b = 0,10 \text{ m/sec}^2$ bis zum Erreichen der Maximalgeschwindigkeit $v_m = 15 \text{ m/min} = 0,25 \text{ m/sec}$.

$$b \cdot t_1 = v_m;$$

daraus die Zeit bis zum Erreichen der Maximalgeschwindigkeit

$$t_1 = \frac{v_m}{b} = 2,5 \text{ sec.}$$

Daraus folgt die zugehörige Hubhöhe

$$h_1 = \frac{1}{2} b t_1^2 = \frac{v_m^2}{2b} = 0,313 \text{ m.}$$

2. Es gelten folgende kinematische Beziehungen zwischen den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 , ω_3 und ω_4 von Motor, Vorgelegewelle, Trommel und Flaschenrolle einerseits und der Beschleunigung b von Q andererseits:

$$\frac{d\omega_4}{dt} = \frac{b}{r}; \quad \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{2b}{r};$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \lambda \cdot \frac{2b}{r}; \quad \frac{d\omega_1}{dt} = \lambda^2 \cdot \frac{2b}{r}.$$

Das Motordrehmoment, das rein statisch dem Gewicht Q Gleichgewicht hält, beträgt:

$$M_{Q_1} = \frac{Qr}{2} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{5000 \cdot 0,3}{2} \cdot \frac{1}{25} = 30 \text{ mkg.}$$

Dies ist das konstant bleibende Drehmoment nach der Anfahrzeit, solange sich die Last mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit v_m bewegt. Während der Anfahrzeit ist das Moment größer, da die einzelnen Massen beschleunigt werden müssen; und zwar von der Beschleunigung von Q bzw. der Beschleunigungskraft $p = \frac{Q}{g} \cdot b$ herrührend

$$M_{P_1} = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} b \cdot r \cdot \frac{1}{\lambda^2} = 0,31 \text{ mkg.}$$

Ferner rühren von der Drehbeschleunigung der vier Drehkörper folgende Momente her, die alle auf die Motorachse bezogen werden:

vom Motoranker:

$$M_1 = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = J_1 \frac{2b}{r} \cdot \lambda^2 = 4,17 \text{ mkg};$$

von der Vorgelegewelle:

$$M_2 = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = J_2 \frac{2b}{r} \cdot \lambda,$$

bezogen auf die Motorachse:

$$M_{21} = M_2 \cdot \frac{1}{\lambda} = J_2 \frac{2b}{r} = 0,07 \text{ mkg};$$

von der Trommel:

$$M_3 = J_3 \frac{d\omega_3}{dt} = J_3 \cdot \frac{2b}{r},$$

bezogen auf die Motorachse:

$$M_{31} = M_3 \cdot \frac{1}{\lambda^2} = J_3 \frac{2b}{r} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = 0,03 \text{ mkg.}$$

von der Flaschenrolle:

$$M_4 = J_4 \frac{d\omega_4}{dt} = J_4 \cdot \frac{b}{r};$$

bezogen auf die Motorachse:

$$M_{41} = M_4 \cdot \frac{1}{\lambda^2} = J_4 \frac{b}{r} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = 0,0007 \text{ mkg.}$$

Während der Anfahrperiode ist demnach das Motordrehmoment:

$$\begin{aligned} M &= M_{Q_1} + M_{P_1} + M_1 + M_{21} + M_{31} + M_{41} \\ &= 34,58 \text{ mkg;} \end{aligned}$$

es stellt das maximale aufzuwendende Drehmoment dar.

3. Leistung $N = M \cdot \omega$ ist am Ende der Anfahrperiode

$$N_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot \omega_m}{75},$$

wobei

$$\omega_m = 2 \frac{v_m}{r} \lambda^2 = 2 \cdot \frac{0,25}{0,3} \cdot 25 = 41,7 \text{ 1/sec.}$$

$$N_{\max} = \frac{34,58 \cdot 41,7}{75} = 19,2 \text{ PS.}$$

Bei konstanter Fahrt ist die Leistung:

$$N = \frac{30 \cdot 41,7}{75} = 16,7 \text{ PS.}$$

$$4. Q \cdot h_2 = \frac{1}{2} (N_{\max} - N) \cdot t_1 \cdot 75 \quad (\text{dies}$$

ist gleich dem Inhalt des schmalen schraffierten kleinen Dreiecks im Leistungsdiagramm)

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{(N_{\max} - N) \cdot 75 \cdot t_1}{2Q} = \\ &= \frac{190 \cdot 2,5}{2 \cdot 5000} = 0,048 \text{ m.} \end{aligned}$$

Drehmomenten-Diagramm s. Abb. 254.

Leistungsdiagramm s. Abb. 255.

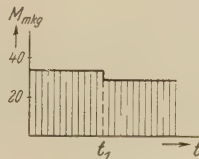


Abb. 254.

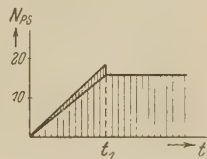


Abb. 255.

§ 4. Die Schwingungen eines materiellen Punktes und Drehschwingungen von starren Körpern.

Die Differentialgleichung für die harmonischen, ungedämpften Schwingungen eines materiellen Punktes lautet:

$$\text{a) } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c x,$$

mit der Lösung: $x = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t$;

$$\text{Frequenz } \alpha = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Die Federkonstante c hat die Dimension kg/cm.

Die entsprechende Differentialgleichung für Drehschwingungen lautet:

$$\text{b) } J \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -c' \varphi.$$

Darin hat das Massenträgheitsmoment J die Dimension kgcmsec² und die Federkonstante c' die Dimension kg · cm. Die Schwingungsdauer ist

$$\text{im Falle a) } T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}};$$

$$\text{im Falle b) } T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{c'}}.$$

Die Schwingungszahl in der Sekunde beträgt: $n_s = \frac{1}{T}$ und die Schwingungszahl in der Minute: $n = 60 n_s = \frac{60}{T}$.

Die Differentialgleichung der gedämpften Schwingungen eines materiellen Punktes (Dämpfung proportional der Geschwindigkeit) lautet:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + c x = 0;$$

$$x = e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot (A \cos \gamma' t + B \sin \gamma' t);$$

$$\text{mit } \gamma' = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}.$$

$$\text{Für } \frac{c}{m} < \frac{k^2}{4m^2}$$

entsteht keine Schwingung, sondern eine aperiodische Bewegung.

Die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen eines materiellen Punktes lautet (Annahme einer periodischen erzwingenden Kraft):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = P \cdot \sin \eta t.$$

Lösung:

$$x = e^{-\frac{k}{2m}t} (A \cos \gamma' t + B \sin \gamma' t) + C \sin (\eta t - \varphi),$$

worin A und B Integrationskonstante sind, während

$$C = \frac{P \cos \varphi}{c - m\eta^2} = \frac{P}{k\eta} \sin \varphi$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k \cdot \eta}{c - m\eta^2} = \frac{\frac{k}{m} \cdot \eta}{\alpha^2 - \eta^2}.$$

Im Falle der Resonanz wird $\alpha = \eta$ und damit der Phasenwinkel φ zwischen erzwingender Kraft und erzwungener Schwingung 90° . Der Ausschlag C wird hierbei $C = \frac{P}{k\eta}$.

1. Aufgabe.

Ein Gewicht von $G = 40 \text{ kg}$ ist an zwei Federn mit den Federkonstanten $c_1 = 15 \text{ kg/cm}$ und $c_2 = 25 \text{ kg/cm}$ aufgehängt.

Gesucht ist:

- Die Schwingungsdauer T_1 der Anordnung a,
- die Schwingungsdauer T_2 der Anordnung b.

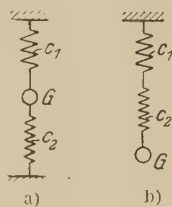


Abb. 256.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } T_1 &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \text{ mit } c = c_1 + c_2 = \\ &= 40 \text{ kg/cm}; T_1 = 0,200 \text{ sec.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } T_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \text{ mit } c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \\ &= 9,37 \text{ kg/cm}; T_2 = 0,414 \text{ sec.} \end{aligned}$$

2. Aufgabe.

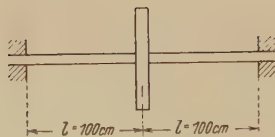


Abb. 257.

Eine beiderseits eingespannte Welle von kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser $d = 12$ cm) trägt in der Mitte eine Scheibe vom Trägheitsmoment $J = 1200 \text{ kg cm sec}^2$. Die Welle ist aus Stahl mit dem Schubelastizitätsmodul $G = 800000$ at. Es soll die um die Wellenachse mögliche Dreh-schwingung untersucht werden. Die Masse der Welle sei vernachlässigt.

Gesucht ist die Schwingungsdauer T und die sekundliche Schwingungszahl n_s .

Lösung:

$$T = 3,77 \cdot 10^{-2} \text{ sec}; n_s = \frac{1}{T} = 26,2 \text{ 1/sec.}$$

3. Aufgabe.

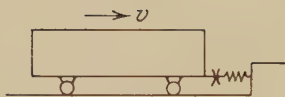


Abb. 258.

Ein Straßenbahnwagen vom Gewicht $G = 13$ t stößt mit der Geschwindigkeit $v = 5$ km/Std. auf einen vollkommen elastischen Puffer, der pro 1 t Druck eine Zusammendrückung von 4,5 mm erfährt.

Gesucht ist:

1. Die maximale Zusammendrückung s der Feder;
2. die Zeit t_1 , nach der der Wagen die Feder wieder verläßt;
3. die Geschwindigkeit v_1 nach Verlassen der Feder.

Lösung: 1. $s = 10,8$ cm;

2. $t_1 = 0,244$ sec;

3. $v_1 = v = 139$ cm/sec.

Näheres siehe 7. Aufg. S. 143.

4. Aufgabe.

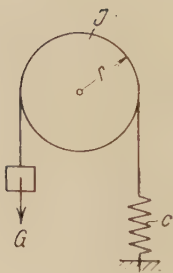


Abb. 259.

Über eine reibungsfrei gelagerte Rolle vom Halbmesser $r = 8$ cm und Trägheitsmoment

$$J = 0,10 \text{ kg cm sec}^2$$

ist ein Seil gelegt, das an einem Ende ein Gewicht $G = 2,0$ kg trägt, während das andere Ende an einer Feder mit der Federkonstanten $c = 2$ kg/cm hängt.

Gesucht ist die Schwingungsdauer der Anordnung.

Lösung:

Das reduzierte Trägheitsmoment ist

$$J_{\text{red}} = J + \frac{G}{g} r^2 = 0,10 + \frac{2}{981} \cdot 64 = 0,2305 \text{ kgcmsec}^2.$$

Die auf die Drehung bezogene Federkonstante ist:

$$C = r^2 \cdot c = 64 \cdot 2 = 128 \text{ kgcm},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\text{red}}}{C}} = 0,266 \text{ sec}.$$

5. Aufgabe.

Ein mit Ringfederpuffern ausgerüsteter Wagen vom Gewicht $Q = 30 \text{ t}$ stößt mit der Geschwindigkeit $v_0 = 5,4 \text{ km/Std.}$ auf einen mit den gleichen Puffern versehenen Prellbock. In jeder Ringfeder tritt bei der Zusammendrückung x zugleich eine elastische Kraft $P_1 = c_1 x$ und eine Reibungskraft $P_2 = c_2 x$ auf. Für einen Puffer ist

$$c_1 = 2000 \text{ kg/cm}$$

$$\text{und } c_2 = 1000 \text{ kg/cm}.$$

Gesucht ist:

- Die maximale Zusammendrückung s jeder Feder,
- die Geschwindigkeit v_1 nach Trennung der Puffer,
- die Berührungsdauer T der Puffer,
- die in Reibungsarbeit umgesetzte Energie A_r in mkg.

$$v = 1,5 \text{ m/sec}.$$

Lösung:

$$\text{a) } c = c_1 + c_2 = 3000 \text{ kg/cm},$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} c s^2; \quad s = v \sqrt{\frac{m}{c}},$$

$$s = 150 \cdot \sqrt{\frac{30 \cdot 10^3}{981 \cdot 3 \cdot 10^3}} = 150 \cdot 0,101 = 15,15 \text{ cm}.$$

b) Von der Reibung rührt folgender Arbeitsverlust her:

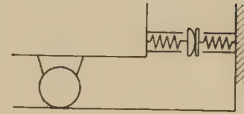
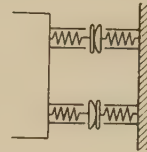


Abb. 260.



$$A_r = 2 \cdot \frac{1}{2} c_2 \cdot s^2 = c_2 s^2 = 1000 \cdot 230 = \\ = 2,3 \cdot 10^5 \text{ cmkg} = 2300 \text{ mkg},$$

Energiegleichung:

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_1^2) = A_r; \quad v_1^2 = v^2 - \frac{2 A_r}{m}, \\ v_1^2 = 2,25 \cdot 10^4 - \frac{2 \cdot 2,3 \cdot 10^5 \cdot 981}{3 \cdot 10^4} = \\ = 2,25 \cdot 10^4 - 1,5 \cdot 10^4 = 0,75 \cdot 10^4, \\ v_1 = 86,5 \text{ cm/sec} = 3,12 \text{ km/Std.}$$

$$c) \quad T = 2\pi \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}} + \sqrt{\frac{m}{c_1 - c_2}} \right] = \\ = \frac{\pi}{2} \left[\sqrt{\frac{3 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^3 \cdot 981}} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{3 \cdot 10^4}{10^3 \cdot 981}} \right] = \frac{\pi}{2} [0,101 + 0,175] = \\ = \frac{\pi}{2} 0,276 = 0,434 \text{ sec.}$$

$$d) \quad A_r = 3450 - 1160 = 2290 \text{ mkg.}$$

6. Aufgabe.

In eine rotationssymmetrische Scheibe vom Trägheitsmoment $J = 240 \text{ kgcmsec}^2$ wird im Abstand $r = 40 \text{ cm}$ vom Drehpunkt ein Loch gebohrt und dabei Material vom Gewicht $G = 2 \text{ kg}$ entfernt.

Wie groß ist die Schwingungsdauer der Scheibe bei kleinen Ausschlägen?

Lösung:

Trägheitsmoment für die Drehachse:

$$J_1 = J - \frac{G}{g} \cdot r^2 = 240 - \frac{2}{981} 40^2 = \\ = 240 - 3,26 = 236,74 \text{ kgcmsec}^2.$$

Moment $M = Gr \sin \varphi \approx Gr \cdot \varphi$,

demnach Konstante c' der Schwingung:
 $c' = G \cdot r = 80 \text{ kgcm.}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{c'}} = 2\pi \sqrt{\frac{236,74}{80}} = 10,8 \text{ sec.}$$



Abb. 261.

7. Aufgabe.

Ein Straßenbahnwagen vom Gewicht $G = 5 \text{ t}$ stößt mit der Geschwindigkeit $v = 8 \text{ km/Std.}$ auf einen vollkommen elastischen Puffer, der pro 1 t Druck eine Zusammendrückung von $4,5 \text{ mm}$ erfährt.

Gesucht ist:

1. Die maximale Zusammendrückung s der Feder,
2. die Zeit t_1 , nach der der Wagen die Feder wieder verläßt,
3. die Geschwindigkeit v_1 nach Verlassen der Feder.

Lösung:

$$v = \frac{8}{3,6} = 2,22 \text{ m/sec};$$

$$\text{Federkonstante } c = \frac{1000}{0,45} = 2220 \text{ kg/cm.}$$

$$1. \text{ Aus Energiesatz } \frac{cs^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \text{ folgt}$$

$$s = v \sqrt{\frac{m}{c}} = 10,6 \text{ cm};$$

$$2. t_1 = \pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 0,15 \text{ sec};$$

$$3. v_1 = v = 8 \text{ km/Std.}$$

8. Aufgabe.

Ein elastischer Balken (Doppel-T-Träger NP. 10; $J_x = 170 \text{ cm}^4$), der auf zwei Federn mit den Federkonstanten $c_1 = 150 \text{ kg/cm}$ gelagert ist, trägt in der Mitte der Spannweite eine Masse vom Gewicht $G = 200 \text{ kg}$.

Gesucht ist die Schwingungsdauer T .

Die Masse des Balkens soll vernachlässigt werden.

Lösung:

Es handelt sich um die Hintereinanderschaltung zweier Federwirkungen, die die Bewegung des Massenpunktes von der Masse $m = \frac{G}{g}$ beeinflussen: erstens die beiden parallel geschalteten Auflager-

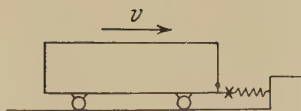


Abb. 262.

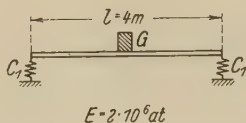


Abb. 263.

federn, deren resultierende Federkonstante $2c_1$ beträgt, und zweitens die Federung des elastischen Stabes, dessen Federkonstante c_2 aus $f_2 = \frac{P l^3}{48 E J} = \frac{P}{c_2}$ zu $c_2 = \frac{48 E J}{l^3} = 255 \text{ kg/cm}$ folgt. Die Federkonstante c der Gesamtanordnung berechnet sich aus $\frac{1}{c} = \frac{1}{2c_1} + \frac{1}{c_2}$ zu $c = 138 \text{ kg/cm}$ und damit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{200}{981 \cdot 138}} = 0,242 \text{ sec.}$$

9. Aufgabe.

An einem vorkragenden Doppel-T-Träger NP. 8 ($J_x = 80 \text{ cm}^4$) ist mit einer Schraubenfeder als Zwischenglied eine Masse vom Gewicht $G = 100 \text{ kg}$ aufgehängt. Die Schraubenfeder dehnt sich bei 100 kg Belastung um $0,5 \text{ cm}$.

Man berechne die Schwingungsdauer T der Anordnung.

Die Massen von Träger und Feder seien vernachlässigt.

Lösung: $T = 0,169 \text{ sec.}$

10. Aufgabe.

Ein Wagenkasten vom Gewicht $Q = 18 \text{ t}$ ist auf 6 Federn mit je der Federkonstante $c_1 = 2000 \text{ kg/cm}$ gelagert. Der Wagenkasten soll außer den vertikalen Translationsschwingungen Drehschwingungen um den Punkt O ausführen. Trägheitsmoment des Wagenkastens in bezug auf eine Achse durch den Schwerpunkt S $J_0 = 26000 \text{ kgmsec}^2$.

Man ermittle die Schwingungsdauer der beiden Hauptschwingungen des Systems.

Lösung:

Translationsschwingung:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \text{ mit } c = 6c_1 = 12000 \text{ kg/cm}$$

und

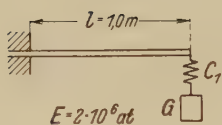


Abb. 264.

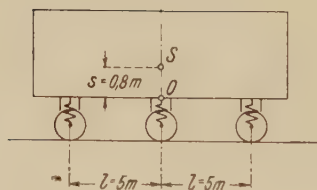


Abb. 265.

$$m = \frac{18000}{981} = 18,4 \text{ kgsec}^2/\text{cm},$$

$$T_1 = 0,246 \text{ s.}$$

Drehschwingungen um 0:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c'}} \text{ mit}$$

$$J = J_0 + ms^2 = 2720000 \text{ kgcmsec}^2 \text{ und}$$

$$c' = 4l \cdot c_1 l = 4c_1 l^2 = 2 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

$$T_2 = 0,232 \text{ sec.}$$

11. Aufgabe.

Ein Gewicht $G = 500 \text{ kg}$ ist durch die beiderseits gelenkig angeschlossenen Stäbe 1 und 2 vom Querschnitt $F = 5 \text{ cm}^2$ gegen die Wand abgestützt. Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^6 \text{ at}$. Gesucht ist für vertikale Schwingungen des Gewichtes die Schwingungsdauer und die sekundliche Schwingungszahl.

Lösung:

$$\Delta l = l \frac{\sigma}{E} = \frac{lS}{FE};$$

$$\text{Formänderungsarbeit } A = \frac{lS^2}{2FE}$$

$$A = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^6} (100 \cdot 10^6 +$$

$$+ 111,7 \cdot 1,25 \cdot 10^6) = 0,5 \cdot 10^{-7} \cdot 240 \cdot 10^6$$

$$= 12,0 \text{ cmkg},$$

$$f = \frac{2A}{G} = \frac{24,0}{500} = 0,048 \text{ cm},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{f}}{g}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{48 \cdot 10^{-6}}{0,981}} = 4,40 \cdot 10^{-2} \text{ sec},$$

$$n_s = \frac{1}{T} = 22,8 \text{ 1/sec.}$$

12. Aufgabe.

In einem U-förmig gebogenen Rohr vom Innendurchmesser $d = 1,0 \text{ cm}$ befindet sich eine Quecksilbersäule. Nachdem zuerst ein Überdruck im Rohr 1 eine un-

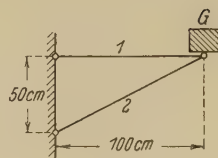


Abb. 266.

Lageplan

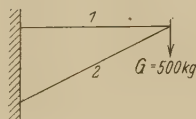


Abb. 267.

Kräfteplan

$$S_1 = 1000 \text{ kg}$$

$$S_2 = 1117 \text{ kg}$$

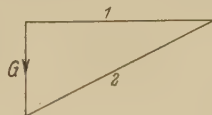


Abb. 268.

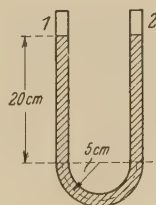


Abb. 269.

gleiche Höhe der beiden Flüssigkeitsspiegel bewirkt hat, werden plötzlich beide Rohrenden mit der Außenluft in Verbindung gesetzt.

Wie groß wird die Schwingungsdauer T der Flüssigkeitssäule?

Lösung:

Aus $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$ mit $m = l \cdot f \cdot \frac{\gamma}{g}$ (worin f = Querschnitt der Flüssigkeitssäule, γ = spezifisches Gewicht der Flüssigkeit) und $c = 2 \cdot f \cdot \gamma$ erhält man

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{55,7}{2 \cdot 981}} = 1,06 \text{ sec.}$$

13. Aufgabe.

Es sollen die erzwungenen und gedämpften Schwingungen eines materiellen Punktes vom Gewicht $Q = 4,9 \text{ kg}$ untersucht werden. Die elastische Kraft beträgt für 4 mm Ausschlag 8 kg, der dämpfende Widerstand ist bei einer Geschwindigkeit von 1 m/sec gleich 1 kg, die erzwingende periodische Kraft $P \sin \eta t$ hat den Größtwert $P = 2 \text{ kg}$. Die Bewegungen des Anfangszustandes seien abgeklungen.

Gesucht ist die Amplitude C der Schwingung für verschiedene Werte des Verhältnisses $\frac{\eta}{\alpha}$ (α = Eigenfrequenz):

$$\frac{\eta}{\alpha} = 0,1; 0,8; 0,95; 1,0; 1,5; 4,0.$$

Graphische Darstellung!

Lösung:

Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung eines materiellen Punktes:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = P \sin \eta t;$$

mit

$$c = \frac{8}{0,4} = 20 \text{ kg/cm}; \quad k = 10^{-2} \text{ kgsec/cm};$$

$$P = 2 \text{ kg}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Für die gedämpften Schwingungen gilt:

$$T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mc - k^2}} = \frac{4\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{20 \cdot 10^{-3} \cdot 20 - 10^{-4}}} =$$

$$= \frac{20\pi \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{\sqrt{4000 - 1}} = 0,099 \text{ sec.}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} = 63,1 \text{ 1/sec.}$$

Für die erzwungenen Schwingungen gilt:

$$C = \frac{P}{\sqrt{(c - m\eta^2)^2 + k^2\eta^2}} =$$

$$= \frac{P}{c} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^2\right)^2 + \kappa^2 \left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^2}}$$

mit $\kappa^2 = \frac{k^2}{mc}$.

$\frac{\eta}{\alpha}$	η	η^2	C (cm)
0,1	6,31	40	0,101
0,8	50,5	$25,5 \cdot 10^2$	0,276
0,95	60,0	$36,0 \cdot 10^2$	0,98
1,0	63,1	$40 \cdot 10^2$	3,16
1,5	253	$6,4 \cdot 10^4$	0,08
4,0	950	$0,905 \cdot 10^6$	0,006

Graphische Darstellung s. Abb. 270.

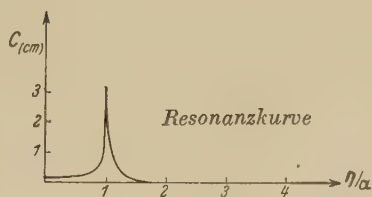


Abb. 270.

14. Aufgabe.

Das um eine Achse drehbare Zeigersystem eines elektrischen Meßinstrumentes stellt sich in eine plötzlich gegebene neue Gleichgewichtslage mit einer gedämpften Schwingung ein. Für ein Trägheitsmoment $J_1 = 0,06 \text{ gmsec}^2$ des Zeigersystems ergab sich bei einem elastischen Moment $c = 80 \text{ gcm}$ pro Verdrehungswinkel $1,0$ nach einem 1. Ausschlag $\alpha_0 = 20^\circ$ der 2. Ausschlag zu $\alpha_1 = -2^\circ$ (von der neuen Gleichgewichtslage aus gerechnet).

Es ist zu untersuchen, welchen Einfluß die Vergrößerung des Trägheitsmomentes auf $J_2 = 0,12 \text{ gmsec}^2$ hat, wenn das

elastische Moment und die Dämpfung unverändert bleiben.

Gesucht ist die Schwingungsdauer T_1 vor der Änderung, ferner die Schwingungsdauer T_2 und das Verhältnis $\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$ nach der Änderung.

Lösung:

Es handelt sich um eine gedämpfte Drehschwingung, wobei die Annahme, daß die Dämpfung jeweils der Winkelgeschwindigkeit proportional ist, zulässig ist. Das logarithmische Dekrement der Schwingung ist:

$$\ln a_n - \ln a_{n+1} = \frac{\pi k}{\sqrt{4 J c - k^2}} = \frac{k T}{4 J}.$$

In unserem Fall ist $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{20}{2} = 10$;
ferner $J = J_1 = 0,06 \text{ gemsec}^2$ und
 $c = 80 \text{ gem}$; aus

$$D_1 = \ln 10 = \frac{\pi k}{\sqrt{4 \cdot J_1 c - k^2}}$$

erhält man

$$k^2 = \frac{4 \cdot J_1 c (\ln 10)^2}{\pi^2 + (\ln 10)^2} = 6,67 (\text{gemsec})^2$$

$$k = 2,58 \text{ gemsec}.$$

Daraus:

$$T_1 = \frac{4 J_1}{k} \ln 10 =$$

$$= \frac{4 \cdot 0,06 \cdot 2,303}{2,58} = 0,216 \text{ sec}.$$

Nach der Änderung des Trägheitsmomentes auf $J_2 = 0,12 \text{ gemsec}^2$ gilt für das neue logarithmische Dekrement:

$$D_2 = \frac{\pi k}{\sqrt{4 J_2 c - k^2}};$$

demnach:

$$\frac{D_2^2}{D_1^2} = \frac{4 J_1 c - k^2}{4 J_2 c - k^2},$$

woraus $D_2 = 1,447$ folgt.

Daraus erhält man jetzt für das Verhältnis $\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = 4,25$ und für die Schwingungsdauer:

$$T_2 = \frac{4 \pi J_2}{\sqrt{4 J_2 c - k^2}} = 0,269 \text{ sec.}$$

15. Aufgabe.

Man untersuche die Bewegung zweier zusammengekuppelter Wagen, wenn nach einer Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit v_0 der vordere Wagen plötzlich mit einer konstanten Bremskraft $R = 4,2 \text{ t}$ gebremst wird. Jeder Wagen hat an der Stirnseite zwei Puffer nebeneinander.

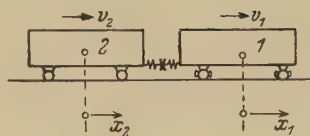


Abb. 271.

Gewicht der Wagen $G_1 = G_2 = 30 \text{ t}$,
 Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10 \text{ m/sec}$,
 Federkonstante eines Puffers
 $c_1 = 3000 \text{ kg/cm}$.

Gesucht:

1. Größte Zusammendrückung einer Feder.
2. Schwingungsdauer T der auftretenden Schwingungen.
3. Man stelle die Gleichung für die Bremszeit t_1 des Wagens 1 auf, ohne sie zu lösen.

Anm.: Man nehme als Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} t = 0 \\ x_1 = 0 \\ v_1 = v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} t = 0 \\ x_2 = 0 \\ v_2 = v_0 \end{cases}$$

Lösung:

Dynamische Grundgleichungen:

$$\text{I. } m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = c(x_2 - x_1) - R,$$

$$\text{II. } m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = c(x_2 - x_1).$$

$$\text{II.} - \text{I.} : m \frac{d^2 (x_2 - x_1)}{dt^2} =$$

$$= -2c \left(x_2 - x_1 - \frac{R}{2c} \right),$$

mit der allgemeinen Lösung

$$x_2 - x_1 - \frac{R}{2c} = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t;$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2c}{m}}.$$

Wegen der Anfangsbedingungen ist:

$$B = -\frac{R}{2c} \text{ und } A = 0.$$

$$\text{III. } \xi = x_2 - x_1 = \frac{R}{2c} (1 - \cos \alpha t).$$

$$\xi_{\max} = \frac{R}{c}; \text{ entsprechend } P_{\max} = R.$$

$$\text{Aus I. und II.: } m \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = -R$$

$$\text{folgt } x_1 + x_2 = -\frac{R}{2m} t^2 + 2v_0 t. \quad (\text{IV.})$$

Aus III. und IV.:

$$x_1 = v_0 t - \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2m} t^2 - \frac{R}{4c} (1 - \cos \alpha t);$$

$$v_1 = v_0 - \frac{R}{2m} t - \frac{R}{4c} \alpha \sin \alpha t;$$

$$x_2 = v_0 t - \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2m} t^2 + \frac{R}{4c} (1 - \cos \alpha t);$$

$$v_2 = v_0 - \frac{R}{2m} t + \frac{R}{4c} \alpha \sin \alpha t.$$

1. Frage:

$$s = \frac{\xi_{\max}}{2} = \frac{R}{2c};$$

darin ist die Federkonstante c der Gesamtanordnung

$$c = \frac{1}{2} \cdot 2c_1 = c_1 = 3000 \text{ kg/cm.}$$

$$s = \frac{4200}{2 \cdot 3000} = 0,7 \text{ cm.}$$

2. Frage:

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2c}} = 0,448 \text{ sec.}$$

3. Frage: Bremszeit t_1 folgt aus

$$v_1 = 0 = v_0 - \frac{R}{2m} t_1 - \frac{R}{4c} \alpha \sin \alpha t_1$$

oder

$$1000 - \frac{4200}{2 \cdot 30,6} \cdot t_1 - 0,35 \cdot 14 \cdot \sin(14 t_1) = 0.$$

Durch näherungsweise Berechnung findet man aus dieser Gleichung

$$14,5 \text{ sec} < t_1 < 14,7 \text{ sec}.$$

16. Aufgabe.

Ein Wagen 1 vom Gewicht $G_1 = 15 \text{ t}$ fährt mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 2 \text{ m/sec}$ auf den in Ruhe befindlichen Wagen 2 vom Gewicht $G_2 = 20 \text{ t}$ auf. Jeder Wagen hat an der Stirnseite 2 Puffer nebeneinander. Die Federkonstante eines Puffers ist $c_1 = 3000 \text{ kg/cm}$. Es soll die Bewegung beider Wagen untersucht werden.

Gesucht sind:

1. Größte Zusammendrückung einer Feder.
2. Berührungsdauer T der Wagen.
3. Lage x_1 und x_2 der Wagen im Augenblick der Trennung.
4. Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Wagen nach der Trennung.
5. Energieverhältnisse während des Stoßes, also

kinetische Energie E_1 des

Wagens 1,

kinetische Energie E_2 des

Wagens 2,

potentielle Energie U der Federn,

abhängig von der Zeit t graphisch dargestellt.

Lösung:

Die Federkonstante c der Gesamtanordnung ist

$$c = 2 \cdot \frac{c_1}{2} = c_1 = 3000 \text{ kg/cm}.$$

Während der Berührung beider Wagen gelten die gekoppelten Differentialgleichungen:

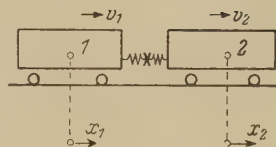


Abb. 272.

$$\text{I. } m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -c(x_1 - x_2)$$

$$\text{II. } m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = c(x_1 - x_2).$$

$$\text{I und II: } m_1 x_1'' + m_2 x_2'' = 0;$$

$$\text{III: } m_1 x_1 + m_2 x_2 = C_1 t + C_2.$$

$$\text{Ferner folgt aus I und II: } m_1 m_2 (x_1'' - x_2'') = -c(m_1 + m_2)(x_1 - x_2).$$

Lösung:

$$\text{IV. } x_1 - x_2 = A \sin(\alpha t + \varphi)$$

$$\text{mit } \alpha = \sqrt{c \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} = 18,53 \text{ 1/sec.}$$

Aus den Anfangsbedingungen:

$$\varphi = 0 \text{ und } A = \frac{v_0}{\alpha}, \text{ sowie } C_2 = 0$$

$$\text{und } C_1 = m_1 v_0.$$

$$\text{III. } m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 v_0 \cdot t;$$

$$\text{IV. } x_1 - x_2 = \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t.$$

Aus III und IV:

$$x_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 t + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t.$$

$$x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 t - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t.$$

Zur Frage 1:

$$s = \left(\frac{x_1 - x_2}{2} \right)_{\max} = \frac{v_0}{2\alpha} = \frac{200}{2 \cdot 18,53} = 5,4 \text{ cm.}$$

Zur Frage 2:

$$T = \frac{\pi}{\alpha} = 0,17 \text{ sec.}$$

Zur Frage 3: Im Augenblick der Trennung ist

$$x_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 T = 14,6 \text{ cm} = x_2.$$

Zur Frage 4: Es ist

$$v_1 = x_1' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_0 \cos \alpha t$$

und

$$v_2 = x_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \cos \alpha t.$$

Zur Zeit der Trennung $t = T$ ist $\cos \alpha T = \cos \pi = -1$, so daß sich ergibt als Geschwindigkeiten nach der Trennung:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = -28,6 \text{ cm/sec}$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 = 171,4 \text{ cm/sec.}$$

Zur Frage 5: Am Anfang ist

$$(E_1)_a = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 15,3 \cdot 200^2 = 3060 \text{ kgm.}$$

Am Ende ist:

$$(E_1)_e = \frac{1}{2} m_1 \cdot 28,6^2 = 60 \text{ kgm.}$$

Die maximale potentielle Energie der Federn ist für die größte Zusammen-drückung

$$U_{\max} = \frac{c}{2} (x_1 - x_2)_{\max}^2 = \frac{3000}{2} \cdot 10,8^2 = 1750 \text{ kgm.}$$

Die Energieverteilung während der Berührung veranschaulicht das Diagramm Abb. 273.

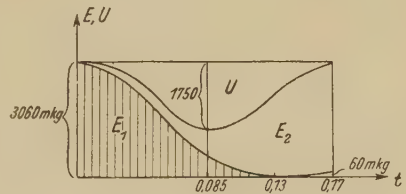


Abb. 273.

17. Aufgabe.

Auf einem Gefälle von 20°_{00} rollen mit konstanter Geschwindigkeit zwei nicht zusammengekuppelte Wagen, von denen der vordere (1) mit einer entsprechenden Bremskraft R_0 gebremst wird.

Es soll untersucht werden, welche Bewegungsvorgänge eintreten, wenn die Bremskraft plötzlich auf das 4fache erhöht wird. Die Reibung soll (abgesehen von der Bremskraft) vernachlässigt werden. Jeder Wagen hat an der Stirnseite zwei Puffer nebeneinander.

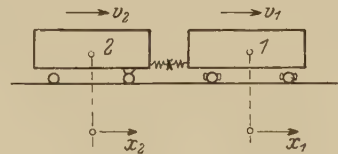


Abb. 274.

Gewicht der Wagen $G_1 = G_2 = 30 \text{ t.}$

Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10 \text{ m/sec.}$

Federkonstante eines Puffers

$$c_1 = 3000 \text{ kg/cm.}$$

Gesucht:

1. Größte Zusammendrückung s eines Puffers.
2. Schwingungsdauer T der auftretenden Schwingungen.
3. Gleichungen für die Wege x_1 und x_2 als Funktion der Zeit.
4. Untersuchung, ob vor Stillstand des Wagens 1 eine Trennung der Puffer eintritt.

Anm.: Man nehme als Anfangsbedingungen:

$$\begin{array}{ll} t = 0 & t = 0 \\ x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ v_1 = v_0 & v_2 = v_0 \end{array}$$

Lösung:

$$R_0 = \frac{2}{100} \cdot 60 \text{ t} = 1200 \text{ kg.}$$

Am Anfang, solange die Bremskraft R_0 beträgt, berechnet sich die Zusammendrückung s_0 der Federn aus der Gleichung:

$$s_0 \cdot c = \frac{1}{2} R_0,$$

da nur die halbe Bremskraft $\frac{R_0}{2}$ durch die Federn auf den hinteren Wagen übertragen wird; daraus

$$s_0 = \frac{1}{2} \frac{R_0}{c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1200}{3000} = 0,2 \text{ cm,}$$

da die Federkonstante c der 4 Federn mit der Federkonstante $c_1 = 3000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$ jeder einzelnen Feder übereinstimmt. Die Zusammendrückung der einzelnen Feder beträgt demnach 0,1 cm.

$$1. \quad s = 0,9 \text{ cm.}$$

$$2. \quad T = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2c}} = 0,447 \text{ sec,}$$

$$\lambda = 14,0 \text{ 1/sec.}$$

$$3. \quad x_1 = -A(1 - \cos \lambda t) + v_0 t - \frac{1}{2} b t^2$$

$$x_2 = +A(1 - \cos \lambda t) + v_0 t - \frac{1}{2} b t^2.$$

Zusätzliche mittlere Zusammendrückung s_1 einer Feder

$$s_1 = 0,4 \text{ cm},$$

da auch die zusätzliche Kraft um das Vierfache erhöht wird.

Größte zusätzliche Zusammendrückung = der doppelten mittleren Zusammendrückung:

$$s_{1\max} = 0,8 \text{ cm} = 2 A.$$

Die gesamte größte Zusammendrückung jeder Feder wird dann

$$s = s_0 + s_{1\max} = 0,9 \text{ cm}.$$

4. Trennung tritt nicht ein, da $s > A$; die Zusammendrückung jeder Pufferfeder schwankt zwischen

$$\begin{aligned} &0,9 \text{ cm und} \\ &0,1 \text{ cm.} \end{aligned}$$

18. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung W.-S. 1924/25.)

Auf einer Welle von 2 m Länge und kreisförmigem Querschnitt von 10 cm Durchmesser sitzt im Abstand von 50 cm vom linken Ende A ein Schwungrad. Wie groß ist das Verdrehungsmoment M , das in der Ebene des Schwungrades angreift (s. Seitenriß) und einen Verdrehungswinkel von 1° (in Bogenmaß $= \frac{\pi}{180}$) hervorruft

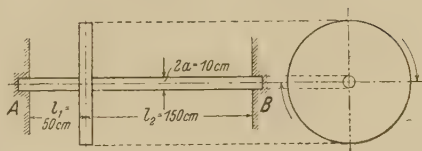


Abb. 275.

1. unter der Annahme, daß die Welle bei A fest eingespannt und bei B drehbar gelagert ist;
2. unter der Annahme, daß die Welle sowohl bei A wie bei B fest eingespannt ist?

Der Schubelastizitätsmodul der Welle betrage $G = 770000 \text{ at}$.

Ferner ist die Schwingungsdauer des Schwungrades unter der obigen zweiten Annahme zu berechnen, wobei die Trägheit der Welle vernachlässigt werden soll. Das Trägheitsmoment des Schwungrades ist $I = 5100 \text{ mkgsec}^2$?

Lösung:

1. $M = 2640 \text{ mkg.}$
2. $M = 3520 \text{ mkg.}$
- $T = 1 \text{ sec.}$

19. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung W.-S. 1927/28.)

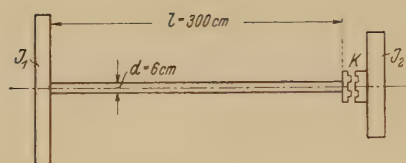


Abb. 276.

Auf einer Welle von $l = 300 \text{ cm}$ Länge und kreisförmigem Querschnitt vom Durchmesser $d = 6 \text{ cm}$ ist am linken Ende ein Schwungrad vom Trägheitsmoment $J_1 = 320 \text{ kgcmsec}^2$ aufgekeilt. Es macht anfänglich mit der Welle $n = 100$ Umdrehungen in der Minute. Am rechten Ende der Welle wird plötzlich durch eine einrückbare Kupplung K (eine sogenannte Klauenkupplung) ein 2. Schwungrad vom Trägheitsmoment $J_2 = 160 \text{ kgcmsec}^2$, das anfänglich in Ruhe war, mit der Welle verbunden, so daß es durch die Massenwirkung des 1. Schwungrades mitgenommen wird. Die Einrückkupplung wird als vollkommen starr angenommen. Es wird sich eine mittlere Winkelgeschwindigkeit ω_1 des ganzen Verbandes einstellen. Infolge der Torsionselastizität der Welle überlagert sich hierüber eine harmonische Schwingung der beiden Schwungräder gegeneinander.

Es sind folgende Fragen zu beantworten:

1. Wie groß ist die anfängliche Winkelgeschwindigkeit ω_0 des ersten Schwungrades, bevor das zweite Schwungrad eingerückt wird?
2. Wie groß ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit ω_1 , mit der sich der aus beiden Schwungrädern bestehende Verband nach Einrücken der Kupplung dauernd weiter dreht?
3. Wie groß ist die Schwingungsdauer T der harmonischen Schwingung, die sich der unter 2 behandelten Drehung überlagert?
4. Wie groß ist der dabei auftretende größte Verdrehungswinkel der Welle?

Die Masse der Welle und der Kupplung ist zu vernachlässigen. Der Schubelastizitätsmodul beträgt $G = 800\,000$ at.

Lösung:

1. $\omega_0 = 10,48 \text{ sec}^{-1}$
2. $\omega_1 = 6,97 \text{ sec}^{-1}$
3. $T = 0,111 \text{ sec}$
4. $\varphi_{\max} = 0,186 = 11^\circ$.

§ 5. Dynamik des Punkthaufens: insbesondere das Prinzip von d'Alembert und Festigkeitsberechnungen bewegter Körper sowie Schwerpunkt- und Flächensatz.

Nach dem d'Alembertschen Prinzip kann man Aufgaben der Dynamik auf entsprechende Aufgaben der Statik zurückführen, indem man an jedem einzelnen Massenpunkt m des Punkthaufens die d'Alembertsche Hilfskraft $\mathfrak{H}$ anbringt:

$$\mathfrak{H} = -m \frac{d^2 \bar{s}}{dt^2} = -m b.$$

Man kann dann für die sämtlichen an dem Körper angreifenden Kräfte, die sich aus den physikalisch existierenden und den d'Alembertschen Hilfskräften zusammensetzen, die Gleichgewichtsbedingungen der Statik anwenden.

Dieses Verfahren ist vor allen Dingen bei Festigkeitsuntersuchungen bewegter Körper wichtig; es kann aber auch zur Lösung anderer Aufgaben der Dynamik zweckmäßig Verwendung finden und stellt überhaupt für jede Aufgabe der Dynamik des Punkthaufens einen möglichen Weg der Lösung dar.

Der erste Schwerpunktsatz:

$$\Sigma m v = M \cdot v_0$$

sagt aus:

Die Bewegungsgröße des Punkthaufens $\Sigma m v$ ist gleich dem Produkt aus der Gesamtmasse $M = \Sigma m$ und der Schwerpunkts-geschwindigkeit v_0 des Punkthaufens.

Der zweite oder Hauptschwerpunktsatz:

$$M \frac{dv_0}{dt} = \Sigma \mathfrak{P} = \mathfrak{R}$$

sagt aus:

Der Schwerpunkt eines Punkthaufens bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse M in ihm vereinigt wäre und als ob sämtliche Kräfte $\mathfrak{P}$ parallel nach dem Schwerpunkt verschoben und dort zu einer Resultierenden $\mathfrak{R}$ vereinigt wären, so daß für die Schwerpunktsbewegung die mechanischen Gesetze über die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes von der Masse M , an dem die Kraft $\mathfrak{R}$ angreift, maßgebend sind. Die inneren Kräfte sind für die Bewegung des Schwerpunktes ohne Einfluß.

Der Flächensatz:

$$\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \text{ mit } \mathfrak{B} = \Sigma [\mathbf{r} \cdot m \mathbf{v}]$$

sagt aus:

Das Moment $\mathfrak{M}$ der äußeren Kräfte für einen beliebigen Bezugspunkt als Momentenpunkt ist gleich der zeitlichen Änderung des Dralles $\mathfrak{B}$ für denselben Punkt als Bezugspunkt zur Bestimmung des Dralles. Auch beim Flächensatz spielen die inneren Kräfte des Punkthaufens keine Rolle.

Die Schwerpunktsätze und der Flächensatz zusammen leisten ebensoviel wie das d'Alembertsche Prinzip. Je nach der Aufgabe wird man den einen oder den anderen Weg der Lösung bevorzugen.

1. Aufgabe.

Gegeben: Reibungslos auf Rollen A und B gelagerte Schiebetüre vom Gewicht $G = 160 \text{ kg}$. Es greift am unteren Ende eine Kraft $P = 30 \text{ kg}$ an.

Gesucht: Auflagerkräfte A und B .

Lösung:

Um die Aufgabe mit einer entsprechenden statischen vergleichen zu können, denkt man sich die d'Alembertschen Hilfskräfte angebracht, deren Resultierende

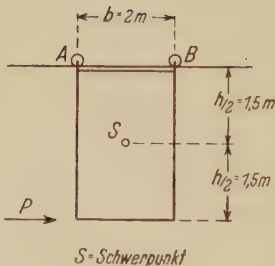


Abb. 277.

durch den Schwerpunkt S geht und entgegengesetzt gleich P ist. Aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen folgt dann: $A = 102,5 \text{ kg}$; $B = 57,5 \text{ kg}$.

2. Aufgabe.

Ein Balken, dessen Gewicht G in der Längsrichtung gleichmäßig verteilt ist, hängt an zwei Seilen A und B . Wie groß wird die Seilspannung A , wenn das Seil B plötzlich durchgeschnitten wird, im ersten Augenblick nach dem Durchschneiden?

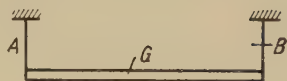


Abb. 278.

Lösung:

Im ersten Augenblick nach dem Durchschneiden greifen an dem Stab nur die vertikalen Kräfte G und A an, so daß sich nach dem Schwerpunktsatz der Schwerpunkt des Stabes senkrecht nach unten bewegen muß; folglich besteht die Bewegung des Stabes im ersten Augenblick aus einer reinen Drehung um das linke Stabende. Die Beschleunigungen der einzelnen Massenelemente des Stabes sind demnach proportional ihrem Abstand vom linken Ende, so daß die Resultierende H der d'Alembertschen Hilfskräfte im Abstand $\frac{2}{3}l$ vom linken Ende senkrecht nach oben gerichtet ist. Das Momentengleichgewicht für das linke Stabende als Momentenpunktes lautet:

$$G \cdot \frac{l}{2} = H \cdot \frac{2}{3}l,$$

woraus

$$H = \frac{3}{4}G$$

und damit

$$A = \frac{1}{4}G$$

folgt. Der Seilzug A geht also im ersten Augenblick des Durchschneidens des Seiles B auf die Hälfte zurück.

Die Reibungen und Luftwiderstände seien vernachlässigt.

Gegeben:

Anfahrstrecke $s = 27 \text{ m}$.
 Höchstgeschwindigkeit $v = 108 \text{ km/h}$.
 Gewicht d. Startwagens $G_1 = 1 \text{ t}$.
 Gewicht d. Flugzeugs $G_2 = 3,2 \text{ t}$.

Ferner Lage der Schwerpunkte und Laufrollen (s. Abb. 280).

Gesucht:

1. Konstante Anfahrbeschleunigung b ,
2. Konstanter Seilzug S ,
3. Raddrücke A und B .

II. Der Startwagen (ohne Flugzeug) vom Gewicht $G_1 = 1 \text{ t}$ fährt mit der Geschwindigkeit $v = 108 \text{ km/h}$ auf eine Bremschiene. Die Bremskraft setzt sich zusammen aus einer konstanten Kraft $R_0 = 12 \text{ t}$ und einer mit dem Bremsweg x linear anwachsenden Kraft $R_1 = c \cdot x$. Hierbei ist die Konstante $c = 60 \text{ kg/cm}$.

Gesucht: 1. Bremsweg x ,
 2. Maximale Verzögerung b_m .

Lösung:

I. 1. $v_m = 108 \text{ km/Std.} = 30 \text{ m/sec}$,

$$s = \frac{1}{2} b t^2 = \frac{1}{2} \frac{v_m^2}{b};$$

daraus

$$b = \frac{v_m^2}{2s} = \frac{900}{2 \cdot 27} = 16,7 \text{ m/sec}^2.$$

$$\begin{aligned} 2. S + P &= \frac{G_1 + G_2}{g} \cdot b = \\ &= \frac{4200}{9,81} \cdot 16,7 = 7150 \text{ kg}, \end{aligned}$$

so daß sich der Seilzug S zu

$$S = 7150 - 600 = 6550 \text{ kg}$$

berechnet.

3. Man bringe die nach rechts gerichteten d'Alembertschen Hilfskräfte H_1 bzw. H_2 in den Schwerpunkten S_1 bzw. S_2 an und drücke das Gleichgewicht zwischen H_1 , H_2 , $G_1 + G_2$ und A und B aus.

Es ist

$$H_1 = \frac{1000}{9,81} \cdot 16,7 = 1700 \text{ kg},$$

$$H_2 = \frac{3200}{9,81} \cdot 16,7 = 5450 \text{ kg}.$$

Man findet

$$A = 2510 \text{ kg}$$

$$B = 6710 \text{ kg}.$$

II. 1. Aus Energiegleichung:

$$\frac{1}{2} m v^2 = R_0 x + \frac{c}{2} x^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{1000}{9,81} \cdot 900 = 12000 x + \frac{60}{2} x^2$$

daraus: $x = 2,40 \text{ m}$.

$$2. P_{\max} = R_0 + c x = 12000 + 60 \cdot 240 = 26400 \text{ kg}.$$

$$b_m = \frac{26400}{1000} \cdot 9,81 = 255 \text{ m/sec}^2.$$

5. Aufgabe.

Auf einem Wagen vom Gewicht $G = 10 \text{ t}$ ruht ein Steinblock vom Gewicht $Q = 6 \text{ t}$. Die Reibungszahl der Ruhe zwischen dem Steinblock und der hölzernen Unterlage sei $\mu = 0,60$.

Es soll untersucht werden, mit welcher maximalen Geschwindigkeit $v_{\max}$ der Wagen auf einen Prellbock auffahren darf, ohne daß ein Gleiten des Steinblocks eintritt. Wagen und Prellbock besitzen nebeneinander zwei Puffer mit der Federkonstante $c = 3000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$ für jeden Puffer.

Lösung:

Die beim Aufprallen des Wagens auf die Federn am Steinblock angreifende d'Alembertsche Hilfskraft H ist nach rechts gerichtet und darf höchstens gleich der Reibungskraft $R = \mu \cdot Q$ sein. Aus $H = \frac{Q}{g} \cdot b_m = \mu Q$ folgt

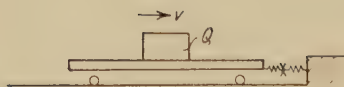
$$b_m = \mu \cdot g.$$


Abb. 382.

1. Dynamische Grundgleichung für Wagen und Block:

$$\frac{Q + G}{g} \cdot b_m = P_m.$$

2. Energiegleichung:

$$\frac{(Q + G) v^2}{2g} = \frac{1}{2} P \cdot x = \frac{P^2}{2c}, \text{ da } P = c \cdot x,$$

$$\text{daraus } P^2 = c \cdot \frac{Q + G}{g} \cdot v^2;$$

für $P = P_m$ folgt aus 1. und 2.

$$c \cdot \frac{Q + G}{g} v^2 = \left(\frac{Q + G}{g} \right)^2 b_m^2,$$

wobei $b_m = \mu \cdot g$. Setzt man in die letzte Gleichung die Zahlenwerte und zwar für $c = 3000 \text{ kg/cm}$ ein, so ergibt sich

$$v = g \cdot \mu \sqrt{\frac{Q + G}{g \cdot c}} = 43,4 \text{ cm/sec.}$$

Lösung auch mit Hilfe des Ansatzes $X = A \sin \alpha t$ möglich.

6. Aufgabe.

Ein Drehgestellwagen vom Gesamtgewicht $Q = 23 \text{ t}$ fährt mit der Geschwindigkeit $v = 1,5 \text{ m/sec}$ auf einen Prellbock auf. Welche maximale Kraft H wird während des Auffahrens an den Drehzapfen von den Drehgestellen auf das Wagenstell übertragen?

Wagen und Prellbock tragen nebeneinander 2 Puffer, die je die Federkonstante $c = 3000 \text{ kg/cm}$ besitzen.

Gewicht des Wagens ohne Drehgestelle

$$G_1 = 15 \text{ t.}$$

Gewicht eines Drehgestelles

$$G_2 = 4,0 \text{ t.}$$

Lösung:

Zusammendrückung der Federn:

$$a = \frac{v_0}{\alpha} = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} = 13,25 \text{ cm.}$$

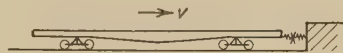


Abb. 283.

Maximale Beschleunigung:

$$b_{\max} = a \cdot \alpha^2 = v_0 \alpha = 17 \text{ m/sec}^2,$$

$$H = m_2 \cdot b_{\max} = 6,94 \text{ t.}$$

7. Aufgabe.

Der Träger eines fahrbaren Bockkrans bildet die Fahrbahn für einen kleineren Drehkran. Es soll die Standsicherheit des Krans beim Auffahren auf die Prellböcke untersucht werden.

Gewicht des Bockkrans

$$\text{ohne Drehkran} \quad G_1 = 40 \text{ t.}$$

$$\text{Gewicht des Drehkrans} \quad G_2 = 10 \text{ t.}$$

Gesamte Federkon-

stante der Puffer-

$$\text{federn} \quad c = 2000 \text{ kg/cm.}$$

Gesucht:

1. Maximale Beschleunigung b während der Pufferung als Funktion der Auffahrgeschwindigkeit v_0 ,
2. maximale zulässige Geschwindigkeit v_{01} mit Rücksicht auf Umkippen des Drehkranes um die Schiene A.
3. maximale zulässige Geschwindigkeit v_{02} mit Rücksicht auf Umkippen des Kranes um den Zapfen B.

Lösung:

$$1. \quad b_{\max} = -\alpha \cdot v_0; \quad \alpha = \sqrt{\frac{c}{m}} = 6,25 \text{ 1/sec.}$$

$$2. \quad G_2 (1 - 0,5) \geq \frac{G_2}{g} \cdot b_1 \cdot 1,2$$

$$b_1 \leq 0,5 \cdot 1,2 \cdot g \leq 408 \text{ cm/sec}^2$$

$$v_{01} = \frac{b_1}{\alpha} \leq 65,4 \text{ cm/sec.}$$

$$3. \quad G_1 \cdot 2,5 + G_2 (2,5 - 0,5) \geq \left(\frac{G_1}{g} \cdot 4 + \frac{G_2}{g} \cdot 7,2 \right) \cdot b_2$$

$$b_2 \leq \frac{120}{232} g \leq 497 \text{ cm/sec}^2$$

$$v_{02} = \frac{b_2}{\alpha} \leq 81 \text{ cm/sec.}$$

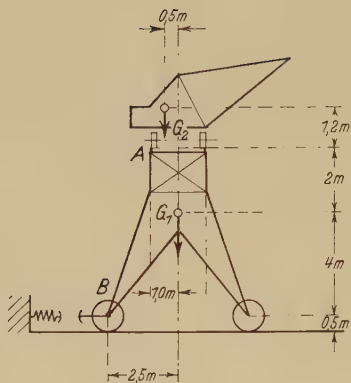


Abb. 284.

8. Aufgabe.

Eine als masselos anzunehmende Stange trägt an den Enden Gewichte $G_1 = 50 \text{ kg}$ und $G_2 = 40 \text{ kg}$ und ist in A drehbar gelagert. Diese Anordnung führt Schwingungen um den Drehpunkt aus, wobei der größte Ausschlag zu $\beta = 30^\circ$ gegeben ist.

Gesucht ist:

- Schwingungsdauer T ,
- Auflagerkraft A im Augenblick des größten Ausschlags,
- maximales Biegemoment in der Stange, und zwar Ort, Größe und Ausschlag φ , bei dem es auftritt.

Lösung:

a) Da es sich um noch ziemlich kleine Ausschläge handelt, kann man angenähert harmonische Drehschwingungen voraussetzen mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}},$$

worin $J = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 = 612 \text{ kgcmsec}^2$ und $c = G_1 l_1 - G_2 l_2 = 3000 \text{ kgcm}$.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{612}{3000}} = 2,83 \text{ sec.}$$

b) Werden die Komponenten der d'Alembertschen Hilfskräfte senkrecht zum Stab mit H_1 bzw. H_2 bezeichnet, so gilt für die Stellung β der Stange als Momentengleichgewichtsbedingung mit A als Momentenpunkt:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + (G_2 l_2 - G_1 l_1) \sin \beta = 0;$$

da ferner

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{m_1 l_1}{m_2 l_2},$$

so ist mit $\beta = 30^\circ$: $H_1 = 12,5 \text{ kg}$;
 $H_2 = 5,0 \text{ kg}$.

Die Horizontal- und Vertikalkomponente A_x bzw. A_y des Gelenkdruckes A ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen

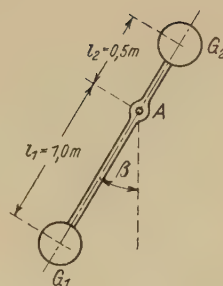


Abb. 285.

Gegeben:

Gesamtgewicht	$Q = 2800 \text{ kg}$
Radstand	$l = 3660 \text{ mm}$
Schwerpunktsabstand	$a = 2160 \text{ »}$
»	$b = 1500 \text{ »}$
Schwerpunktshöhe über Radachse	$h = 320 \text{ »}$
Radhalbmesser	$r = 440 \text{ »}$
Bremstrommelhalbmesser	$\varrho = 260 \text{ »}$
Haftreibungszahl zwisch. Gummi und Asphalt	$\mu_0 = 0,7$
Reibungszahl zwischen Bremsbacken und Bremstrommel	$\mu_1 = 0,35.$

Gesucht:

- Welche maximale Bremsverzögerung b ist in den Fällen 1, 2 und 3 zu erreichen?
- Mit welcher Kraft P müssen hierbei die Bremsbacken an die Bremstrommel angepreßt werden?

Lösung:

1. Fall: Nur Hinterradbremse (s. Abb. 288.)

$$R = \mu_0 \cdot B.$$

Die d'Alembertsche Hilfskraft H ist nach rechts im Sinne der Geschwindigkeit gerichtet; es ist als erste Gleichgewichtsbedingung:

$$\text{I.} \quad H = R = \mu_0 \cdot B.$$

Momentengleichgewicht verlangt

(A = Momentenpunkt):

$$\text{II.} \quad -B \cdot l + Q \cdot a - H(h + r) = 0.$$

Aus I und II:

$$H = R = \frac{\mu_0 \cdot a}{l + \mu_0(h + r)} \cdot Q = 1010 \text{ kg}.$$

Bremsverzögerung:

$$b_1 = \frac{H}{m} = 3,54 \text{ m/sec}^2.$$

Gleichgewicht am Rad unter Berücksichtigung von zwei Bremstrommeln (s. Abb. 289):

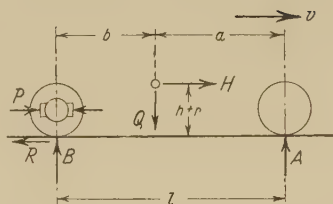


Abb. 288.

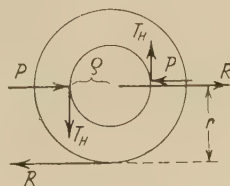


Abb. 289.

$$2 T \cdot 2 \varrho = R \cdot r; \quad T = \frac{r}{4 \varrho} \cdot R = \mu_1 \cdot P_h$$

daraus

$$P_h = \frac{r}{4 \varrho \mu_1} R = 1220 \text{ kg.}$$

2. Fall: Vorderradbremse:

Die Überlegungen sind entsprechend wie in Fall 1. Sie liefern:
eine Bremsverzögerung

$$b_2 = 3,30 \text{ m/sec}^2$$

und eine Bremskraft

$$P_v = 1140 \text{ kg.}$$

3. Fall: Vierradbremse mit

$$\text{I.} \quad \frac{P_v}{P_h} = \frac{2}{3} = \frac{R_v}{R_h} \quad (\text{s. Abb. 290}).$$

Es ist entweder

$$\text{a)} \quad R_h = \mu_0 \cdot B$$

und

$$R_v \leq \mu_0 \cdot A$$

oder

$$\text{b)} \quad R_h \leq \mu_0 \cdot B$$

und

$$R_v = \mu_0 \cdot A.$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\text{II.} \quad R_v + R_h = H \quad \text{aus I. und II:}$$

$$R_h = 0,6 H; \quad R_v = 0,4 H.$$

$$\text{III.} \quad B = Q \cdot \frac{a}{l} - H \cdot \frac{h+r}{l}.$$

Unter Annahme a) $0,6 H = \mu_0 \cdot B$

$$0,6 H = \mu_0 \left(\frac{a}{l} Q - H \cdot \frac{h+r}{l} \right);$$

$$H = \frac{\mu_0 \cdot a}{0,6 l + \mu_0 (h+r)} \cdot Q = 1555 \text{ kg;}$$

$$b_3 = \frac{H}{m} = \frac{\mu_0 \cdot a}{0,6 l + \mu_0 (h+r)} \cdot g = 5,45 \text{ m/sec}^2;$$

$$R_h = 935 \text{ kg; } R_v = 620 \text{ kg;}$$

$$A = \frac{R_h}{\mu_0} = 1330 \text{ kg,}$$

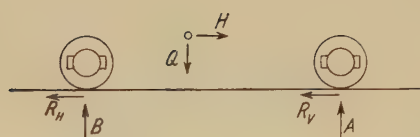


Abb. 290.

in der Tat ist $R_v < \mu_0 \cdot A$, woraus folgt, daß Annahme a) richtig ist

$$P_v = 750 \text{ kg.}$$

$$P_h = 1130 \text{ kg.}$$

11. Aufgabe.

Durch die Schubstange AB eines Kurbelgetriebes wird der Bolzen CF und der Bügel $CDEF$ hin- und herbewegt. Da die Schubstange als sehr lang angenommen werden kann, bewegt sich der Punkt B nach der Gleichung $x = r \sin \varphi$, wobei $r = 20 \text{ cm}$. Der Bolzen hat ein gleichmäßig verteiltes Gewicht

$$q_1 = 0,4 \text{ kg/cm,}$$

der Bügel hat ein gleichmäßig verteiltes Gewicht

$$q_2 = 0,2 \text{ kg/cm.}$$

Drehzahl der Kurbel $n = 600 \text{ U/min.}$

Gesucht:

1. Maximale Zugkraft bzw. Druckkraft in der Schubstange AB ,
2. Ort und Größe des maximalen Biegemomentes im Bolzen,
3. maximale Biegungsspannung im Bolzen (Durchmesser des Bolzens $d = 8 \text{ cm}$).
4. Ort und Größe des maximalen Biegemomentes im Bügel.

Lösung:

$$1. \quad x = r \sin \varphi,$$

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot \omega \cdot \cos \varphi,$$

Beschleunigung

$$b = \frac{d^2 x}{dt^2} = -r \omega^2 \sin \varphi,$$

maximale Beschleunigung

$$\begin{aligned} b_m = r \omega^2 &= 20 \cdot \left(\frac{600 \cdot \pi}{30} \right)^2 = \\ &= 79000 \text{ cm/sec}^2, \end{aligned}$$

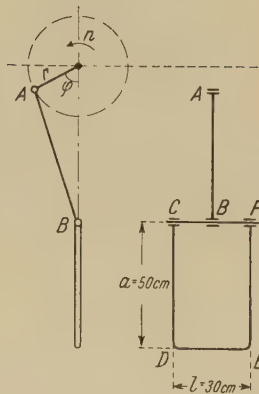


Abb. 291.

Gesamtgewicht

$$\begin{aligned}
 G &= G_1 + G_2 = q_1 \cdot l + q_2(l + 2a) = \\
 &= 0,4 \cdot 30 + 0,2 \cdot 130 = \\
 &= 12 + 26 = 38 \text{ kg},
 \end{aligned}$$

Maximale Zugkraft

$$S_m = \frac{G}{g} \cdot b_m = \frac{38}{981} \cdot 79000 = 3060 \text{ kg}.$$

2. Das maximale Biegemoment im Bolzen tritt im Augenblick der maximalen Beschleunigung b_m auf. Die Belastung geht aus Abb. 292 hervor:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{m_2}{2} \cdot b_m = \frac{G_2}{2g} b_m = \\
 &= \frac{13}{981} \cdot 79000 = 1050 \text{ kg}.
 \end{aligned}$$

Ferner die d'Alembertschen Hilfskräfte h_1 :

$$h_1 = \frac{q_1}{g} \cdot b_m = \frac{0,4}{981} \cdot 79000 = 32,2 \text{ kg/cm}.$$

Das maximale Moment wird im mittleren Querschnitt übertragen:

$$\begin{aligned}
 M_{\max} &= C \frac{l}{2} + h \cdot \frac{l^2}{8} = 1050 \cdot 15 + \\
 &+ 32,2 \cdot \frac{900}{8} = 15750 + 3620 = \\
 &= 19370 \text{ kgcm}.
 \end{aligned}$$

$$3. \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \text{ mit}$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = 50,27 \text{ cm}^3;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{19370}{50,27} = 386 \text{ at}.$$

4. Für den Bügel gilt folgende Belastung (s. Abb. 293) mit den d'Alembertschen Hilfskräften

$$h_2 = q_2 \cdot \frac{b_m}{g} = 0,2 \cdot \frac{79000}{981} = 16,1 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.$$

Biegemoment für den Querschnitt O:

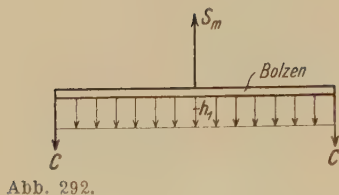


Abb. 292.

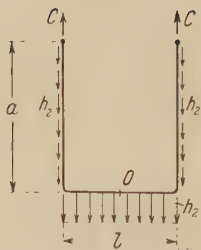


Abb. 293.

$$M_b = C \frac{l}{2} - h_2 a \cdot \frac{l}{2} - h_2 \frac{l^2}{8} = 15750 - \\ - 12100 - 2000 = 1650 \text{ kgem.}$$

12. Aufgabe.

Eine Walze vom Radius r_1 ist an dem auf der Walze aufgewickelten Seil 1 aufgehängt. Auf der mit der Walze fest verbundenen Scheibe vom Radius r_2 ist das Seil 2 aufgewickelt, das am freien Ende ein Gewicht G_2 trägt.

Gewicht der Walze $G_1 = 80 \text{ kg}$

Trägheitsmoment

der Walze $J = 60 \text{ kgemsec}^2$

Gewicht $G_2 = 60 \text{ kg.}$

Gesucht:

1. Beschleunigung b_1 des Schwerpunktes der Walze,
2. Beschleunigung b_2 des Gewichtes G_2 ,
3. Seilzug S_1 in Seil 1.

Lösung:

Wird der Drehwinkel der Walze mit φ bezeichnet, so ist die Verschiebung des Schwerpunktes der Walze senkrecht nach unten $y_1 = r_1 \cdot \varphi$; in gleicher Zeit hebt sich das Gewicht G_2 nach oben um $y_2 = + (r_2 - r_1) \varphi$. Die zugehörigen d'Alembertschen Hilfskräfte sind der Größe nach $H_1 = + m_1 y_1'' = + m_1 r_1 \varphi''$ und $H_2 = + m_2 y_2'' = + m_2 \cdot (r_2 - r_1) \varphi''$. Außerdem kann man sich ein d'Alembertsches Hilfsmoment $M_h = - J \cdot \varphi''$ angebracht denken. Dann handelt es sich um das Gleichgewicht der aus Abb. 295 zu ersiehenden Kräfte bzw. Momente an der Walze:

Die 1. Gleichgewichtsbedingung lautet (A als Momentenpunkt):

$$+ J \varphi'' + G_1 r_1 - G_2 (r_2 - r_1) + \\ + m_1 r_1^2 \varphi'' + m_2 (r_2 - r_1)^2 \varphi'' = 0,$$

woraus:

$$\varphi'' = \frac{-G_1 r_1 + G_2 (r_2 - r_1)}{J + m_1 r_1^2 + m_2 (r_2 - r_1)^2} = \\ = 3,39 \text{ 1/sec}^2.$$

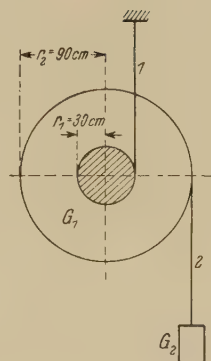


Abb. 294.

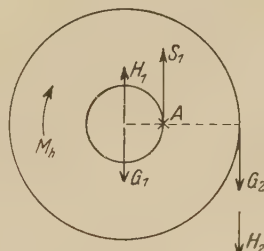


Abb. 295.

Damit wird

1. die Beschleunigung

$$b_1 = r_1 \varphi'' = 102 \text{ cm/sec}^2$$

2. die Beschleunigung

$$b_2 = -(\ddot{r}_2 - \ddot{r}_1) \varphi'' = -204 \text{ cm/sec}^2.$$

3. Aus der Gleichgewichtsbedingung in der Vertikalen ergibt sich der Seilzug

$$\begin{aligned} S_1 &= G_1 + G_2 + H_2 - H_1 = 80 + 60 + \\ &+ \frac{60}{981} \cdot 60 \cdot 3,39 - \frac{80}{981} \cdot 30 \cdot 3,39 = \\ &= 80 + 60 + 12,4 - 8,4 = 144 \text{ kg.} \end{aligned}$$

13. Aufgabe.

Eine Stange von der Länge $l = 1 \text{ m}$ und dem Gewicht $Q = 25 \text{ kg}$ trägt an den Enden die Gewichte $G_1 = 10 \text{ kg}$ und $G_2 = 10 \text{ kg}$. Die Stange soll sich reibungsfrei auf einer horizontalen Glasplatte bewegen können und wird durch eine horizontal gerichtete Kraft $P = 100 \text{ kg}$, die 30 cm vom einen Ende entfernt senkrecht zum Stab während $t = 0,04 \text{ sec}$ wirkt, angestoßen. Das Widerstandsmoment des Stangenquerschnitts ist $W = 30 \text{ cm}^3$.

Gesucht:

1. Bewegung der Stange nach dem Stoß,
2. Ort und Größe der größten Bieungsbeanspruchung $\sigma_{\max}$ während des Stoßes.

Lösung:

1. Nach dem Schwerpunktsatz ist

$$m \frac{dv}{dt} = P, \text{ worin } m \text{ die gesamte Masse}$$

$$m = \frac{G_1 + G_2 + Q}{g} = \frac{45}{981} \frac{\text{kgsec}^2}{\text{cm}}$$

und v die Schwerpunktschwindigkeit bedeutet. Da P während der Stoßzeit von $t = 0,04 \text{ sec}$ konstant angenommen werden soll, kann man sofort integrieren und erhält den Impulssatz hier in der Form $m v = P \cdot t$.

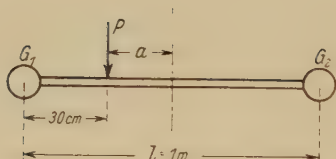


Abb. 296.

$$v = \frac{P \cdot t}{m} = \frac{100 \cdot 0,04 \cdot 981}{45} = 87,2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

ist die Schwerpunktseschwindigkeit am Ende und nach dem Stoß; dazu kommt eine Winkelgeschwindigkeit ω , die sich aus

$$J \omega = \int M dt = P a t, \text{ zu}$$

$$\omega = \frac{P a t}{J} = \frac{100 \cdot 20 \cdot 0,04}{72,2} = 1,11 \frac{1}{\text{sec}}$$

berechnet; darin ist

$$J = 2 \frac{G_1}{g} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + 2 \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \frac{Q}{lg} x^2 dx = 72,2 \text{ kgcmsec}^2.$$

2. Während des Stoßes: Beschleunigung des Schwerpunktes

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{v}{t} = \frac{87,2}{0,04} = 2180 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Drehbeschleunigung:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega}{t} = \frac{1,11}{0,04} = 27,7 \frac{1}{\text{sec}^2}.$$

Beschleunigung von G_1 :

$$b_1 = \frac{dv}{dt} + \frac{l}{2} \frac{d\omega}{dt} = 3565 \frac{\text{cm}}{\text{s} \cdot \text{c}^2};$$

Beschleunigung von G_2 :

$$b_2 = \frac{dv}{dt} - \frac{l}{2} \frac{d\omega}{dt} = 795 \frac{\text{cm}}{\text{s} \cdot \text{c}^2}.$$

d'Alembertsche Hilfskräfte:

$$H_1 = \frac{G_1}{g} b_1 = 36,4 \text{ kg}$$

$$H_2 = \frac{G_2}{g} b_2 = 8,1 \text{ kg}.$$

Von der Stange rühren geradlinig verteilte d'Alembertsche Hilfskräfte her, deren Belastungsintensitäten an den Enden betragen:

$$h_1 = \frac{Q}{lg} \cdot b_1 = 0,908 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

und

$$h_2 = \frac{Q}{lg} \cdot b_2 = 0,203 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.$$

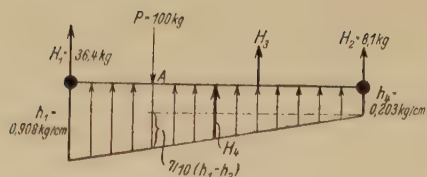


Abb. 297.

Der Stab steht unter neben gezeichneten Kräften im Gleichgewicht (Abb. 297).

Das maximale Moment tritt in Punkt A auf, es ist

$$M_A = H_2 \cdot 70 + H_3 \cdot 35 + H_4 \cdot \frac{70}{3}$$

mit

$$H_3 = 0,203 \cdot 70 = 14,2 \text{ kg und}$$

$$H_4 = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot \frac{7}{10} (h_1 - h_2) = 17,2 \text{ kg,}$$

also $M_A = 1454 \text{ kgcm}$ und

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{1454}{30} = 48,5 \text{ at.}$$

14. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung S.-S. 1923.)

Ein homogener starrer Stab AB von der Länge $2a = 4 \text{ m}$ steht anfangs aufrecht und fällt dann infolge seines labilen Gleichgewichtes um, wobei das Ende A auf dem vollkommen glatten horizontalen Boden ohne Reibung gleitet.

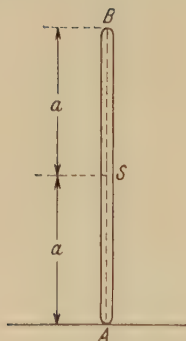


Abb. 298.

1. Auf welcher Bahn bewegt sich der Schwerpunkt S zu Boden?
2. Man stelle die Differentialgleichung für die Schwerpunktsbewegung auf, ohne sie zu integrieren.
3. Wie verteilt sich beim Aufschlagen des Stabes auf den Boden die vertikale Geschwindigkeit und die vertikale Beschleunigung längs des Stabes?

Lösung:

1. Da der Stab am Boden reibungsfrei gleitet, ist die Auflagerkraft senkrecht nach oben gerichtet. Das im Schwerpunkt angreifende Gewicht G ist senkrecht nach unten gerichtet. Nach dem Schwerpunktsatz bewegt sich demnach der Schwerpunkt S auf der Vertikalen nach abwärts.

2. Für beliebige Stellung φ (s. Abb. 299) gilt:

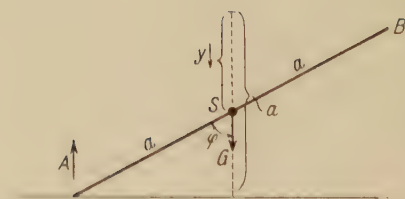


Abb. 299.

I. $G - A = m y''$ (Schwerpunktsatz).

II. $A a \sin \varphi = J \cdot \varphi''$ (Dynamische Grundgleichung für Drehung um den Schwerpunkt).

Aus der kinematischen Beziehung

$$a - y = a \cos \varphi$$

folgt:

$$-y' = -a \sin \varphi \cdot \varphi'$$

und

$$-y'' = -a \cos \varphi \cdot \varphi'^2 - a \sin \varphi \cdot \varphi'',$$

und damit aus I. und II.

$$\begin{aligned} \varphi'' \left[\frac{J}{a \sin \varphi} + \frac{G}{g} a \cdot \sin \varphi \right] + \\ + \frac{G}{g} a \cdot \cos \varphi \cdot \varphi'^2 - G = 0; \end{aligned}$$

dabei ist

$$J = \frac{G}{g} \cdot \frac{a^2}{3}.$$

3. Energiegleichung:

$$G a = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J \omega_0^2,$$

wobei im Augenblick des Aufschlagens des Stabes $v_0 = a \cdot \omega_0$ ist, so daß

$$G a = \omega_0^2 \left(\frac{1}{2} m a^2 + \frac{1}{2} J \right),$$

oder

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{2a} \quad \text{und} \quad v_0^2 = \frac{3ag}{2}.$$

Damit ist die Verteilung der vertikalen Geschwindigkeiten bestimmt, da diese in A Null ist und proportional dem Abstand vom linken Ende zunimmt. Entsprechendes gilt von den vertikalen Beschleunigungen. Ihre Verteilung geht demnach aus der Schwerpunktsbeschleunigung hervor. Diese folgt aber aus dem Gleichgewicht der vertikalen Kräfte mit den d'Alembertschen Hilfskräften (mit A als Momentenpunkt) zu $b_0 = \frac{3}{2} a g$.

15. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung W.-S. 1928/29.)

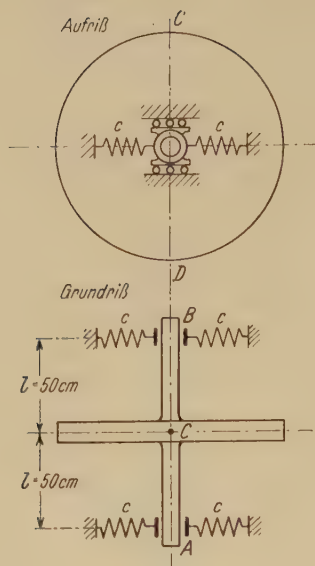


Abb. 300.

1. Frage: Ein Schwungrad macht $n = 1200$ U/min. Um das von der Lager- und Luftreibung herrührende Moment zu ermitteln, wird das Schwungrad mit dieser Drehzahl sich selbst überlassen und festgestellt, daß es innerhalb $t_1 = 525$ sec zur Ruhe kommt. Unter der Annahme, daß das Schwungrad während dieser ganzen Zeit eine gleichförmig verzögerte Drehbewegung ausgeführt hat, ist zunächst die Winkelverzögerung und daraus das bremsende Moment M_b zu berechnen. Das Trägheitsmoment des Schwungrades in bezug auf die Drehachse soll $J_1 = 20$ mkgsec² betragen.

2. Frage (siehe Abb. 300): Dasselbe Schwungrad sitzt in der Mitte einer starken Welle, die in A und B gelagert ist. Die Lager A und B sind unter dem Einfluß von je zwei Federn horizontal reibungslos verschiebbar, dagegen in vertikaler Richtung fest abgestützt. Das Lager A werde durch eine äußere Kraft horizontal um die Strecke a nach links verschoben, gleichzeitig das Lager B um die Strecke a nach rechts. Sodann wird die Anordnung sich selbst überlassen, so daß sich eine Schwingung um die vertikale Achse CD einstellt. Die Feldstärke jeder der vier Federn beträgt $c = 20$ kg/cm, das Trägheitsmoment der Anordnung um die vertikale Achse CD beträgt $J_2 = 15$ mkgsec².

- Wie groß ist die Schwingungsdauer T_1 , wenn die Welle nicht rotiert?
- Wie groß ist die Schwingungsdauer T_2 , wenn die Welle mit der konstanten Drehzahl $n = 1200$ U/min rotiert?
- Zwischen welchen Grenzen schwanken im Falle b die vertikalen Auflagerdrücke A und B , wenn die horizontalen Ausschläge der Lager

A und B bei dieser Schwingung $\alpha = 5$ cm betragen? Die Auflagerdrücke im Ruhezustand sind
 $A = B = 700$ kg.

Lösung:

Zu Frage 1:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0,24 \text{ sec}^{-2} \text{ und } M_b = 4,8 \text{ mkg.}$$

Zu Frage 2:

a) $T_1 = 0,544 \text{ sec,}$

b) $T_2 = T_1.$

c) $A_{\max} = B_{\max} = 3620 \text{ kg;}$
 $A_{\min} = B_{\min} = -2220 \text{ kg.}$

16. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung S.-S. 1928.)

Die nebenstehende Abbildung zeigt den einen Arm eines Zentrifugalpendels. Die punktförmige Masse, die am freien Ende angebracht ist, habe ein Gewicht $G_1 = 20$ kg, während die längs der Stange von $l = 60$ cm gleichmäßig verteilte Masse ein Gewicht $G_2 = 15$ kg besitzt. Das Zentrifugalpendel habe eine Tourenzahl von $n = 50$ Umläufen in der Minute.

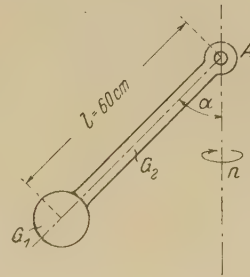


Abb. 301.

1. Man berechne den Ausschlag α_1 , unter dem sich das Zentrifugalpendel einstellt, wobei zunächst Gewicht und Masse der Stange vernachlässigt werden sollen. Ferner bestimme man Horizontal- und Vertikalkomponente des Gelenkdruckes in A .
2. Man berechne den Ausschlag α_2 unter Berücksichtigung von Gewicht und Masse der Stange und gebe auch in diesem Falle horizontale und vertikale Komponente des Gelenkdruckes in A an.
3. Wie groß ist das Biegemoment, das im mittleren Querschnitt der Stange, also im Abstand $l/2 = 30$ cm vom Gelenkpunkt A übertragen

wird, wobei wieder Gewicht und Masse der Stange zu berücksichtigen sind?

Lösung:

1. $\alpha_1 = 53^\circ 10'$ 2. $\alpha_2 = 48^\circ 47'$
 $\begin{cases} A_x = 26,7 \text{ kg} \\ A_y = 20 \text{ kg} \end{cases}$ $\begin{cases} A_x = 34,5 \text{ kg} \\ A_y = 35 \text{ kg} \end{cases}$
3. $M_b = 35 \text{ cmkg}$.

17. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung S.-S. 1929.)

Eine eiserne rechteckige Platte von den Abmessungen $l = 2,5 \text{ m}$; $b = 1,0 \text{ m}$; $h = 3 \text{ cm}$ liegt an den 4 Ecken in gleicher Höhe auf Federn auf, von denen jede die Federkonstante $c = 60 \text{ kg/cm}$ besitzt. Die Platte soll als starr angesehen werden

I. Fall: Die Platte sei unbelastet, so daß nur das Eigengewicht der Platte in Betracht kommt.

Man bestimme:

1. die Schwingungsdauer T_1 der ungedämpften harmonischen Translationsschwingung, die die Platte in vertikaler Richtung ausführen kann;
2. die Schwingungsdauer T_2 der ungedämpften harmonischen Drehschwingung, die die Platte um die Achse AA (s. Abb. 302) auszuführen vermag.

Das Gewicht G_1 der Platte bestimmt sich aus dem spez. Gewicht des Eisens $\gamma = 7,86 \text{ g/cm}^3$. Die Plattendicke h darf als sehr klein gegenüber den Abmessungen l und b angesehen werden.

II. Fall: Die Platte sei in der Mitte durch einen Stein in Gestalt eines Quaders vom Gewicht $G_2 = 250 \text{ kg}$ belastet.

3. Man berechne die Schwingungsdauer T_3 der vertikalen Translationschwingung, die die Platte mit dem Quader ausführen vermag.

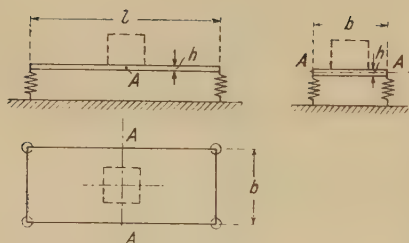


Abb. 302.

4. Wie groß darf der Ausschlag a dieser harmonischen Schwingung höchstens sein, damit zu keinem Zeitpunkt ein Abheben des Steines von der Platte erfolgt?
5. Wie ändert sich der Druck P zwischen Platte und Stein nach Größe und Vorzeichen während einer vollen Translationschwingung mit dem Ausschlag $a_1 = 14 \text{ mm}$? Insbesondere soll hierbei der maximale und minimale Druck $P_{\max}$ bzw. $P_{\min}$ angegeben werden.

Lösung:

- I. Fall: 1. $T = 0,31 \text{ sec.}$
2. $T = 0,178 \text{ sec.}$
- II. Fall: 3. $T = 0,376 \text{ sec.}$
4. $a_{\max} = 3,5 \text{ cm.}$
5. $P_{\min}$ (an der oberen Umkehrstelle) = 150 kg.
 $P_{\max}$ (an der unteren Umkehrstelle) = 350 kg.

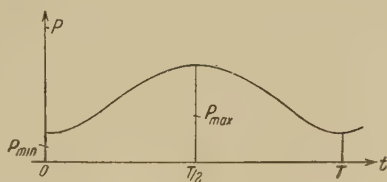


Abb. 303.

§ 6. Der Kreisel. Elastische Schwingungen von Stäben und Wellen.

Unter einem Kreisel versteht man einen starren Körper, der die drei Freiheitsgrade der Rotation besitzt. Ist er im Schwerpunkt reibungsfrei und vollkommen drehbar gelagert (z. B. mittels der kardani-schen Aufhängung) und greifen außer dem Gewicht, das durch die Lagerung aufgenommen wird, keine weiteren äußeren Kräfte an, so handelt es sich um den sog. kräftefreien Kreisel. Die allgemeine Bewegung des kräftefreien Kreisels läßt sich durch Abrollen des Trägheitsellipsoides auf der unveränderlichen Ebene darstellen (Poinsot-Bewegung). Der zeitliche Ablauf der Bewegung wird durch die Eulerschen Gleichungen geregelt. Der Drall $\mathfrak{B}$ ist beim kräftefreien Kreisel konstant nach Größe und Richtung.

Die Bewegung des schweren Kreisels oder des Kreisels unter Zwang wird zweckmäßig mit Hilfe des Flächensatzes untersucht: $\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt}$. Der Drall

für einen um eine freie Achse (z. B. Symmetrieachse) rotierenden Kiesel fällt in die Achse und hat die Größe $B = J\omega$. Wird ein derartiger Kiesel mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ um eine zur ursprünglichen freien Achse senkrecht stehenden Achse gedreht, so ist dazu ein Moment notwendig von der Größe $|\mathfrak{M}| = J\omega \frac{d\varphi}{dt}$.

Die Richtung des Momentenvektors $\mathfrak{M}$ steht senkrecht auf den Achsen der beiden Winkelgeschwindigkeiten ω und $\frac{d\varphi}{dt}$. Es leistet in folgedessen keine Arbeit, ähnlich wie die Zentripetalkraft bei der Bewegung eines materiellen Punktes in einer Kurve.

Die Differentialgleichung für die Biegungsschwingungen prismatischer Stäbe lautet $EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, worin $\mu = \frac{\gamma}{g}$ die auf die Längeneinheit des Stabes bezogene Masse bedeutet.

Die Differentialgleichung für die Torsionsschwingungen von Wellen lautet:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

worin G den Schubelastizitätsmodul und ρ die spezifische Massendichte des Materials bedeutet.

1. Aufgabe.

- a) Man zeichne das Trägheits- und das Drallellipsoid einer quadratischen Platte von überall gleicher Dicke vom Gewicht $Q = 40 \text{ kg}$. Die Winkelgeschwindigkeit in Richtung der x -Achse werde zu $\omega_x = 30 \text{ sec}^{-1}$ angenommen.

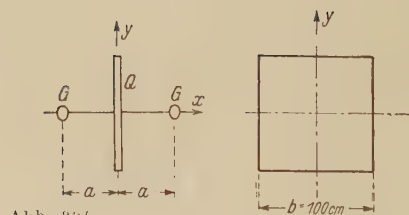


Abb. 304.

- b) Durch Hinzufügung von zwei Gewichten $G = 40 \text{ kg}$ auf der x -Achse soll das Trägheitsellipsoid zu einer Kugel gemacht werden. (Kugelschale.)

Wie groß ist der Abstand a zu wählen?

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } J_y &= J_z \\ J_x &= J_y = 2 J_y \end{aligned}$$

Für die Achsen $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ des Trägheitsellipsoids gilt:

$$\begin{aligned} J_x \omega_x^2 &= J_y \cdot \omega_y^2 = J_z \omega_z^2 \\ \omega_x &= 30 \text{ sec}^{-1} \end{aligned}$$

$$\omega_y = \omega_z = \omega_x \sqrt{\frac{J_x}{J_y}} = \omega_x \sqrt{2} = 42,4 \text{ sec}^{-1}.$$

Die Achsen des Drallellipsoids sind B_x, B_y, B_z :

$$B_x = J_x \omega_x = \frac{Q}{g} \cdot \frac{b^2}{6} \omega_x = 2040 \text{ kgcmsec},$$

$$\begin{aligned} B_y &= B_z = J_y \cdot \omega_y = B_x \cdot \frac{J_y}{J_x} \cdot \frac{\omega_y}{\omega_x} = \\ &= B_x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1440 \text{ kgcmsec}. \end{aligned}$$

- b) Es muß werden:

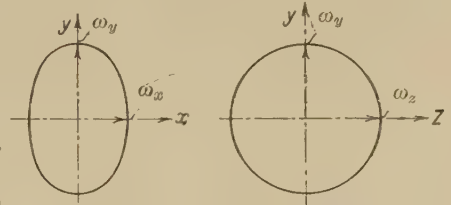
$$\begin{aligned} J_x &= J_y = J_z = \frac{Q}{g} \frac{b^2}{6} \\ \frac{Q}{g} \cdot \frac{b^2}{12} + 2 \cdot \frac{G}{g} \cdot a^2 &= \frac{Q}{g} \cdot \frac{b^2}{6} \\ a &= \frac{b}{\sqrt{24}} = 20,4 \text{ cm}. \end{aligned}$$

2. Aufgabe.

- a) Man zeichne das Trägheits- und das Drallellipsoid einer Kreisscheibe von überall gleicher Dicke vom Gewicht $Q = 180 \text{ kg}$. Die Winkelgeschwindigkeit in Richtung der x -Achse werde zu $\omega_x = 20 \text{ sec}^{-1}$ angenommen.

- b) Durch Hinzufügung von zwei Gewichten $G = 50 \text{ kg}$ auf der x -Achse

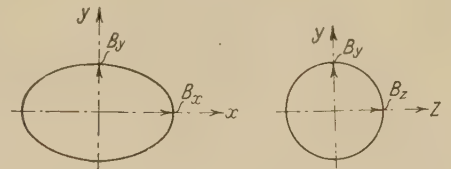
Trägheitsellipsoid



Abgeplattetes Rotationsellipsoid.

Abb. 305.

Drallellipsoid



Gestrecktes Rotationsellipsoid.

Abb. 306.

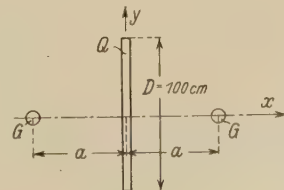


Abb. 307.

soll das Trägheitsellipsoid zu einer Kugel gemacht werden. (Kugelschmelze.)

Wie groß ist der Abstand a zu wählen?

Lösung:

$$a) \quad J_x = 229,5 \text{ kgcmsec}^2$$

$$J_y = \frac{J_x}{2} = 115 \text{ kgcmsec}^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \omega_x^2 J_x = \frac{1}{2} \omega_y^2 \cdot J_y$$

$$\omega_y = 28,3 \text{ sec}^{-1}$$

$$B_x = J_x \cdot \omega_x = 4590 \text{ kgcmsec}$$

$$B_y = J_y \cdot \omega_y = 3240 \text{ kgcmsec}$$

$$b) \quad J_{y_1} = J_x$$

$$J_{y_1} = J_y + 2 \frac{G}{g} \cdot a^2 = J_x$$

daraus

$$a = 33,6 \text{ cm.}$$

3. Aufgabe.

Auf eine Welle ist eine Scheibe vom Durchmesser $d = 250 \text{ cm}$ und dem Gewicht $Q = 100 \text{ kg}$, das über die Kreisfläche gleichmäßig verteilt sein soll, so aufgekeilt, daß ihre Mittelebene mit der zur Wellenachse senkrechten Ebene einen Winkel $\alpha = 4^\circ$ bildet. Dabei soll die Wellenachse genau durch den Schwerpunkt der Scheibe gehen. Wie groß ist das von der Welle und den Lagern aufzunehmende Moment, wenn die Umdrehungszahl der Welle zu $n = 3500 \text{ U/min}$ gegeben ist?

Lösung:

$$dC = dm \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$dm = \frac{dQ}{g} = \frac{1}{g} \cdot \frac{Q}{R^2 \pi} r d\varphi dr$$

$$dC' = dC \cdot \sin \varphi = \frac{Q r^2 \omega^2 \sin \varphi}{g R^2 \pi} dr d\varphi$$

$$dM = dC' \cdot r \sin \varphi \cdot \sin \alpha$$

$$= (dm \cdot \omega^2 \cdot \alpha) \cdot r^2 \sin^2 \varphi$$

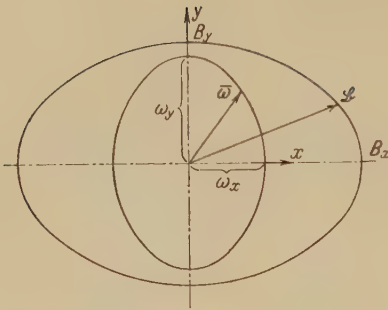


Abb. 308.

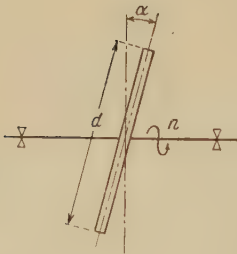


Abb. 309.

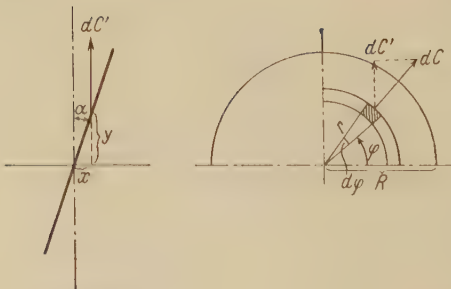


Abb. 310.

$$\begin{aligned}
 M &= \omega^2 \alpha \iint r^2 \sin^2 \varphi \cdot dm = \\
 &= \omega^2 \alpha \iint \frac{Q}{R^2 \pi g} r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi = \\
 &= \omega^2 \alpha \frac{Q \cdot R^2}{4g} = 620,5 \text{ mkg.}
 \end{aligned}$$

4. Aufgabe.

Für eine elektrische Lokomotive mit direktem Stangenantrieb sollen die in der Kurve und in der davor liegenden Übergangsstrecke infolge Kreiselwirkung des Rotors auftretenden Momente untersucht werden.

Gegeben:

Krümmungshalbmes-
ser der Kurve $R = 900 \text{ m}$
Trägheitsmoment des
Rotors $J = 860 \text{ kgmsec}^2$
Drehzahl des Rotors $n = 550 \text{ U/min}$
Fahrgeschwindigkeit $v = 120 \text{ km/Std.}$
Abstand der Rad-
drücke $s = 1500 \text{ mm}$
Anstieg der überhöhten
Schiene in der
Übergangsstrecke $= 1 : 300$.

Gesucht:

1. Kreiselmoment um die Längsachse (Kippmoment) nach Größe und Drehsinn (nach außen oder nach innen?),
2. Vergrößerung bzw. Verkleinerung der Summe der Raddrücke auf einer Seite (ΔP),
3. Kreiselmoment um die Hochachse nach Größe und Drehsinn (nach außen oder nach innen?).

Lösung:

1. Der Flächensatz: $\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ wird auf den Rotor in der Kurve angewandt.

Aus Abb. 312 sieht man, daß

$$1\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cdot \Delta\varphi_1 = B \cdot \Delta\varphi_1$$

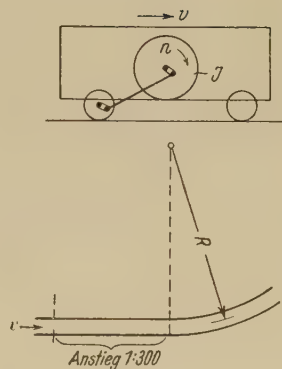


Abb. 311.

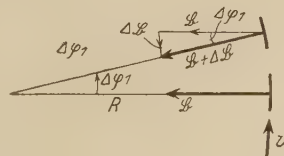


Abb. 312.

$$\mathfrak{M}_1 = M_1 = \left| \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \right| = B \cdot \frac{dq_1}{dt} = B \cdot \omega_1;$$

$$\omega = \frac{n \cdot \pi}{30} = \frac{550 \cdot \pi}{30} = 57,6 \frac{1}{\text{sec}};$$

$$B = J \cdot \omega = 860 \cdot 57,6 = 49600 \text{ kgmsec};$$

$$\omega_1 = \frac{v}{R} = \frac{1}{900} \cdot \frac{120}{3,6} = 0,0371 \frac{1}{\text{sec}};$$

$$v = \frac{120}{3,6} = 33,4 \text{ m/sec.}$$

$$M_1 = 49600 \cdot 0,0371 = 1838 \text{ kgm.}$$

$\mathfrak{M}_1$ hat die Richtung von $\Delta \mathfrak{B}$ (s. Abb. 312), also um die innere Schiene. Dies ist aber das Moment der äußeren Kräfte, wie sie von den Schienen auf die Lokomotive ausgeübt werden, so daß der Druck der äußeren Schiene um ΔP vermehrt und der der inneren Schiene um ΔP vermindert wird; dabei ist

$$2. \quad \Delta P = \frac{M_1}{s} = \frac{1838}{1,5} = 1225 \text{ kg.}$$

Wäre das Kreiselmoment M_1 entsprechend groß, so würde der Druck auf die innere Schiene Null werden und ein Umkippen der Lokomotive um die äußere Schiene eintreten. Um den Drehsinn des von der Kreiselwirkung des Rotors herrührenden Kippmomentes zu ändern, muß man durch Zwischenschaltung eines Zahnradvorgeleges dafür sorgen, daß sich Lokomotivräder und Rotor in entgegengesetzter Richtung drehen.

3. Ein Kreiselmoment um die Hochachse (d. h. die senkrecht zum Boden stehende Richtung) tritt beim Befahren der Übergangsstrecke auf. Die Lokomotive dreht sich hierbei um ihre Längsachse mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{h/s}{l/v},$$

worin l = Länge der Übergangsstrecke und h = Überhöhung in der Kurve bedeuten.

$$\omega_2 = \frac{h \cdot v}{l \cdot s} = \frac{33,4}{300 \cdot 1,5} = 0,074 \frac{1}{\text{sec}}.$$

Damit wird das Moment M_2 um die Hochachse

$$M_2 = \left| \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \right| = B \cdot \omega_2 = \\ = 49\,600 \cdot 0,074 = 3680 \text{ kgm}.$$

5. Aufgabe.

Eine beiderseits gelenkig gelagerte Welle von kreisringförmigem Querschnitt trägt in der Mitte der Spannweite eine Scheibe vom Gewicht $G = 98 \text{ kg}$. $E = 2,15 \cdot 10^6 \text{ at}$. Gesucht ist die kritische Drehzahl n_k .

Lösung:

Die kritische Drehzahl n_k stimmt mit der Eigenschwingungszahl der freien Biegeschwingungen der nicht rotierenden Welle überein:

$$\omega_k = \alpha = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{mit } c = \frac{P}{f}, \quad \text{wobei} \\ f = \frac{1}{48} \frac{P l^3}{E J}.$$

Das axiale Trägheitsmoment J der Welle ist

$$J = \frac{\pi d_1^4}{64} - \frac{\pi d_2^4}{64} = 12,57 - 0,79 = \\ = 11,78 \text{ cm}^4.$$

Die Masse

$$m = \frac{G}{g} = \frac{98}{981} = 0,1 \text{ kgcm}^{-1} \text{ sec}^2.$$

$$c = \frac{48 E J}{l^3}.$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{48 \cdot 2,15 \cdot 10^6 \cdot 11,78}{10^6 \cdot 0,1}} = 110 \frac{1}{\text{sec}}.$$

$$n_k = \omega_k \cdot \frac{30}{\pi} = 1050 \text{ U/min}.$$

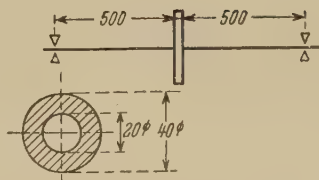


Abb. 313.

6. Aufgabe.

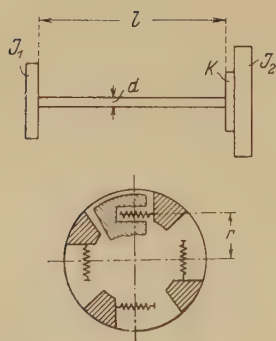


Abb. 314.

Es sollen die Torsionsschwingungen einer Welle mit zwei Schwungmassen unter Berücksichtigung einer eingebauten elastischen Kupplung (K) untersucht werden. Die beiden Kupplungshälften sind durch 4 Spiralfedern mit je der Federkonstante $c = 1000 \text{ kg/cm}$ verbunden.

Gegeben ist:

Massenträgheitsmoment in bezug auf die Wellenachse $J_1 = 10 \text{ kgcmsec}^2$

$$J_2 = 20 \quad \text{»}$$

Länge der Welle $l = 600 \text{ mm}$

Durchmesser der Welle $d = 40 \text{ mm}$

Schubelastizitätsmodul $G = 770000 \text{ at}$
 $r = 120 \text{ mm}.$

Die Masse der Welle und der Kupplung ist zu vernachlässigen.

Gesucht ist:

1. Anzahl der Schwingungen pro Minute n_1 , wenn die Kupplung starr gebaut wird;
2. Anzahl der Schwingungen pro Minute n_2 , wenn die Kupplung, wie angegeben, elastisch gebaut wird.

Lösung:

$$1. \quad n_1 = \frac{60}{T_1} = 2090 \frac{1}{\text{min}} \quad \text{folgt aus}$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{c_1}} \quad \text{mit}$$

$$c_1 = \frac{J_p G}{l_1} = \frac{25,14 \cdot 7,7 \cdot 10^5}{40} = 4,83 \cdot 10^5 \text{ kgcm}.$$

2. Von der Kupplung rührt ein elastisches Moment:

$$c' = 4cr^2 = 4 \cdot 1000 \cdot 12^2 = 576 \cdot 10^3 \text{ kgcm}$$

her, was einer reduzierten Wellenlänge

$$l_{\text{red}} = \frac{G J_p}{c'} = 33,5 \text{ cm}$$

entspricht.

Aus

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{l_2}{l_1} \text{ mit } l_1 + l_2 = l + l_{\text{red}} = 93,5 \text{ cm}$$

folgt:

$$l_2 = \frac{J_1}{J_1 + J_2} (l + l_{\text{red}}) = 31,2 \text{ cm};$$

$$l_1 = 62,3 \text{ cm}.$$

Demnach liegt der ruhende Querschnitt innerhalb der Kupplung.

$$\begin{aligned} T_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{c_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_1 \cdot l_1}{J_p \cdot G}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{10 \cdot 62,3}{25,14 \cdot 7,7 \cdot 10^5}} = 0,0357 \text{ sec}, \end{aligned}$$

$$n_2 \cdot \frac{60}{T_2} = 1685 \frac{1}{\text{min}}.$$

7. Aufgabe.

(Diplomvorprüfung S.-S. 1924.)

Eine $l = 3 \text{ m}$ lange Stange von kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser $d = 5 \text{ cm}$) ist an den beiden Enden B und C fest eingespannt und trägt in ihrer Mitte A durch Vermittlung einer Feder eine Last $Q = 1000 \text{ kg}$. Die Feder F ist dadurch gekennzeichnet, daß bei einer Vergrößerung der Last um 20 kg ihre Längenänderung $0,1 \text{ cm}$ beträgt.

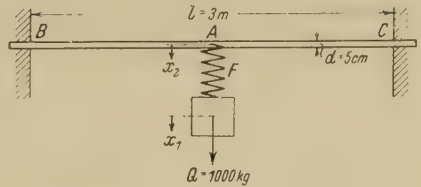


Abb. 315.

1. Man soll die Schwingungsdauer der Last Q , die als materieller Punkt aufzufassen ist, berechnen unter der Voraussetzung, daß der Stab BC als absolut starr angesehen werden kann.
2. Man soll bei der Berechnung der Schwingungsdauer von Q die Elastizität der Stange BC , aber nicht ihre Masse berücksichtigen. Dabei kann von der Formel für den Biegunbspfeil:

$$f = \frac{1}{192} \frac{P l^3}{E J}$$

einer beiderseits eingespannten, in der Mitte durch P belasteten Stange Gebrauch gemacht werden. In unserem Falle ist für den Elastizitätsmodul $E = 2000000 \text{ at}$ zu benutzen und das Trägheitsmoment J berechnet sich zu

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = 30,6 [\text{cm}^4].$$

Die vertikale Verschiebung der Last aus der Gleichgewichtslage soll mit x_1 und die des Aufhängepunktes A der Feder mit x_2 bezeichnet werden.

3. Es ist die Dauer der Biegungsgrundschwingung des Stabes BC unter Weglassen des bei A angehängten Gewichtes Q zu berechnen. Dabei soll das spezifische Gewicht des Materials, aus dem die Stange besteht, $\gamma = 8 \text{ kg/cdm}$ betragen.

Lösung:

1. $T = 0,444 \text{ sec}$
2. $T = 0,543 \quad \gg$
3. $T = 0,04 \quad \gg$

In unserem Verlage erschienen ferner:

Drang und Zwang

Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure

Von Prof. Dr. Dr.-Ing. Aug. Föppl und Prof. Dr. Ludwig Föppl.

Band I: 2. Aufl. 371 S., 70 Abb. Gr.-8°. 1924. Brosch. M. 16.—, geb. M. 17.50.

Band II: 2., neu bearbeitete Aufl. 390 S., 79 Abb. Gr.-8°. 1928. Brosch. M. 16.—, in Leinen geb. M. 17.50.

Inhalt des I. Bandes: I. Die allgemeinen Grundlagen. II. Die Sätze über die Formänderungsarbeit. III. Die Biegungsfestigkeit der Platten. IV. Die Scheiben.

Inhalt des II. Bandes: V. Die Schalen. VI. Die Drehfestigkeit der Stäbe. VII. Die Umdrehungskörper. VIII. Die Härte. IX. Die Eigenspannungen. X. Die Knick- und Ausweichgefahr.

Zeitschrift des V. D. I.: Das Buch bedeutet eine erfreuliche Erweiterung unserer theoretischen Erkenntnisse auf dem Gebiete der Festigkeitslehre. Es kann jedem genügend vorgebildeten und nach weiterer Vertiefung seines Wissens strebenden Ingenieur bestens empfohlen werden. Aber auch der Studierende findet manche beachtenswerte grundsätzliche Erläuterungen.

Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architektenvereins: Eine durch Zusammenarbeit von Vater und Sohn geschaffene sorgfältige und vollendete Darstellung von Spitzenleistungen der Festigkeitslehre. Auch dieser neueste, tadellos ausgestattete „Föppl“ sei wie alle seine Vorgänger Fachgenossen und höherstrebenden Studierenden wärmstens empfohlen.

Der Bauingenieur: Alle Untersuchungen sind mit der größten Sorgfalt durchgeführt und in der meisterhaft klaren Fassung vorgetragen, durch die sich die Föpplschen Bücher auszeichnen und auch den mathematisch weniger geübten Ingenieuren das Verständnis für schwierigere Entwicklungen wesentlich erleichtert wird. Es ist die Sprache des Ingenieurs, die das Buch dem Leser vertraut macht und ihn gewinnt und gerade darum als bedeutungsvolle Bereicherung der technischen Literatur bezeichnet werden muß. Die Darstellung der schwierigen theoretischen Zusammenhänge ist in ihrer klaren, einfachen Sprache meisterhaft.

Stahl und Eisen: Zusammenfassend möchte ich sagen: „Drang und Zwang“ ist in vieler Hinsicht bahnbrechend; man kann weder in der deutschen noch in der fremden Literatur ein Buch finden, das mit solcher Sicherheit wie dieses den Mittelweg zwischen der technischen Festigkeitslehre und der mathematischen Elastizitätstheorie einschlägt.

Achsensymmetrisches Ausknicken zylindrischer Schalen

Von Prof. Dr. L. Föppl. 14 S., 8°. 1926. Brosch. M. —.60.

Untersuchung ebener Spannungszustände mit Hilfe der Doppelbrechung

Von Prof. Dr. L. Föppl. 19 S. Gr.-8°. 1928. M. 1.50.

Lebenserinnerungen Rückblick auf meine Lehr- und Aufstiegjahre.

Von Prof. Dr. Dr.-Ing. Aug. Föppl. 158 S. Gr.-8°. 1925. Leinen M. 6.—.

Vorlesungen über allgemeine Mechanik

Von Prof. Dr. Dr.-Ing. Alexander Brill, Tübingen.

364 S., 165 Abb. Gr.-8°. 1928. Brosch. M. 18.—; in Leinen geb. M. 20.—.

INHALT:

Erster Teil: Der materielle Punkt

I. Kinematik der geradlinigen Bewegung. II. Von den Ursachen der Beschleunigung. III. Freie ebene Bewegung. IV. Freie räumliche Bewegung. V. Einiges über Vektorrechnung. VI. Zentralkräfte. VII. Anziehung raumerfüllender Massen auf einen Massenpunkt. VIII. Unfreie ebene und räumliche Bewegung. IX. Gegenseitig aufeinander wirkende Massenpunkte. X. Relativbewegung.

Zweiter Teil: Der starre Körper

XI. Geometrie der Bewegung des starren Körpers. XII. Gleichgewicht der Kräfte am starren Körper. XIII. Statik des schweren Körpers. XIV. Dynamik des Punktsystems und des starren Körpers. XV. Drehung des starren Körpers um einen festen Punkt. Freie Bewegung. XVI. Anwendungen und Ausführungen zum vorigen Abschnitt. XVII. Wirkung von Stoßkräften auf einen Körper.

„Es ist bewundernswert zu sehen, welch reichen Inhalt der Verfasser auf knappem Raum und doch in durchweg ausführlicher Darstellung vor uns ausbreitet. Statik, Kinematik und Dynamik der Punktsysteme und starren Körper machen den Gegenstand des Buches aus. Überall knüpft der Verfasser an einfache naheliegende Beispiele an. Gerade die Bearbeitung solcher Dinge, die zahlreichen eingestreuten historischen Bemerkungen, die Hinweise auf die modernste anschließende Entwicklung machen das Buch zu einem für die Einführung der Studierenden der Mathematik besonders geeignet. . . . Dem Buche ist weite Verbreitung zu wünschen und wohl sicher.“

(Jahresbericht d. deutsch. Mathematiker-Vereinigung.)

„Dieses Buch ist eine sehr glückliche Lösung des Problems, klare Übersichtlichkeit der Darstellung mit anschaulicher Entwicklung der Begriffe zu verbinden. Während die für den technischen Unterricht geschriebenen Lehrbücher oft eine rezeptensammlung-ähnliche Aneinanderreihung von Aufgaben enthalten, die die großen Zusammenhänge verdecken, verfallen viele von Universitätsseite stammende Werke in den entgegengesetzten Fehler: sie bauen ein exakt begründetes Lehrgebäude auf, ohne aber durch geeignete Beispiele die neu entstehenden Begriffe so zu fixieren, daß sie für den Lernenden zu einer tragfähigen Unterlage für weitere Aufbauten werden. In der Brill'schen Darstellung bleibt die logische Einheitlichkeit voll bewahrt; daneben helfen aber gut ausgewählte Beispiele und Aufgaben, die Begriffe mit anschaulichem Inhalt zu erfüllen und gleichzeitig eine Verbindung zu schaffen andererseits. Besonders zu begrüßen sind die sehr lebendig eingeflochtenen geschichtlichen Bemerkungen, insbesondere die genauen Quellenangaben bei den klassischen Sätzen. Bei jeder Gelegenheit wird auf Berührungspunkte mit benachbarten Gebieten aufmerksam gemacht . . .“

(Metallwirtschaft.)

R. Oldenbourg, München 32 und Berlin W 10



S0-EBA-769

